Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

16.04.2010

Übungen zur Funktionalanalysis, Blatt 1

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 23.04.2010, in den Briefkästen auf F 4.

Es sei (X, T) ein topologischer Raum, der ein T_4–Raum ist. Eine Menge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, wenn $X \setminus A$ offen ist. Eine Menge $A \subset X$ heißt *folgenabgeschlossen*, wenn jede Folge in A mit Grenzwert in X diesen Grenzwert sogar in A hat. Eine Menge $A \subset X$ heißt *kompakt*, wenn jede Überdeckung von A mit offenen Mengen eine endliche Teilüberdeckung enthält. Und A heißt *abzählbar kompakt*, wenn jede Folge in A einen Häufungspunkt in A besitzt[1]. Der Abschluß $\overline{A}$ einer Menge $A \subset X$ ist der Durchschnitt von allen abgeschlossenen Teilmengen von X, die A enthalten.
Zu beweisen ist dann:

1. Jede kompakte Teilmenge von X ist abzählbar kompakt. Wenn jeder Punkt von X eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, dann ist jede kompakte Teilmenge von X auch folgenkompakt.
2. Jede abzählbar kompakte Menge ist folgenabgeschlossen.
3. Wenn $A \subset X$ kompakt ist, und B ist abgeschlossen mit $B \subset A$, dann ist B auch kompakt.
4. Ene Teilmenge A von X ist offen genau dann, wenn es zu jedem $x \in A$ eine Umgebung U_x gibt mit $x \in U_x \subset A$.
5. Beliebige Durchschnitte von abgeschlossenen Mengen ergeben wieder abgeschlossene Mengen.
6. Es besteht $\overline{A}$ aus allen $x \in X$, für die jede ihrer Umgebungen einen nichtleeren Durchschnitt mit A hat.
7. Es ist A abgeschlossen genau dann, wenn $A = \overline{A}$.
8. Wenn d eine Metrik auf der Menge X ist, dann auch $d' = \frac{d}{1+d}$.

[1] Vorsicht: das ist nicht dasselbe wie *folgenkompakt*: jede Folge in M enthält eine Teilfolge, die einen Grenzwert in M hat