Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

23.04.2010

Übungen zur Funktionalanalysis, Blatt 2

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 30.04.2010, in den Briefkästen auf F 4.

Eine Menge M in einem Vektorraum U heißt konvex, wenn mit zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke in M enthalten ist. Also:

$$x_0,\ x_1 \in M, \quad 0 \le \lambda \le 1 \qquad \Longrightarrow \qquad (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 \in M.$$

Normierte Räume statten wir in kanonischer Weise mit einer Metrik aus, und anschließend mit einer Topologie.
Zu beweisen ist dann:

1. Wenn eine Teilmenge M eines normierten Raumes konvex ist, dann auch der topologische Abschluß $\overline{M}$.
2. Wenn M ein Untervektorraum eines normierten Raumes ist, dann ist auch der topologische Abschluß $\overline{M}$ ein Untervektorraum desselben normierten Raumes.
3. Wenn M ein Untervektorraum eines normierten Raumes X ist, und $\dim M < \infty$, dann ist M eine abgeschlossene Teilmenge von X.
4. Sei M ein Untervektorraum eines Banachraums X. Zeigen Sie: es ist der Quotientenraum X/M ein Hausdorffraum genau dann, wenn M eine abgeschlossene Teilmenge von X ist.
5. Seien X und Y zwei normierte Räume, und $f\colon X \to Y$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: es ist f stetig genau dann, wenn es eine Konstante C_0 gibt mit

   $$\|f(x)\|_Y \le C_0 \, \|x\|_X$$

   für jedes $x \in X$.
6. Seien X und Y zwei Hausdorffräume (nicht unbedingt linear). Zeigen Sie: eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist stetig genau dann, wenn zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung $V_y \subset Y$ von $y := f(x)$ eine Umgebung $U_x \subset X$ von x existiert mit $f(U_x) \subset V_y$.

   Hinweis: Nutzen Sie Ihre Kenntnisse von Blatt 1.