Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

30.04.2010

Übungen zur Funktionalanalysis, Blatt 3

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 07.05.2010, in den Briefkästen auf F 4.

1. Für $1 \leq p \leq \infty$ untersuche man, ob der Raum der auf einem kompakten Intervall stetigen Funktionen, versehen mit der L^p–Norm, einen Banachraum ergibt.

2. Sei X ein Prähilbertraum und $(x_1, \ldots, x_N)$ eine orthonormale Familie in X. Beweisen sie, daß für $x \in X$ der Ausdruck $\left\| x - \sum_{n=1}^N c_n x_n \right\|$ am kleinsten wird, falls man $c_n = \langle x, x_n \rangle$ wählt.

3. Sei M eine nichtleere Menge in einem Hilbertraum X. Zeigen Sie, daß $(M^\perp)^\perp$ gleich dem Abschluß der linearen Hülle von M ist.

4. Wir definieren X als den Vektorraum (über $\mathbb{C}$) der endlichen Linearkombinationen der Funktionen $e_\lambda = e_\lambda(x) = \exp(\mathrm{i}\lambda x)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, daß

$$\langle f, g \rangle := \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{x=-T}^{T} f(x)\overline{g(x)} \, \mathrm{d}x$$

   tatsächlich ein Skalarprodukt auf X ist, und daß X damit kein Hilbertraum wird.

5. Ein normierter Raum heißt separabel, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Zeigen Sie, daß der Raum X der vorigen Aufgabe nicht separabel ist.