Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

14.05.2010

Übungen zur Funktionalanalysis, Blatt 5

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 21.05.2010, in den Briefkästen auf F 4.

1. Sei $X = C([0,1])$, ausgestattet mit der üblichen Maximumsnorm, $\psi \in X$, und $T \in \mathcal{L}(X)$ der Multiplikationsoperator mit ψ:
$$(Tf)(t) := \psi(t)f(t).$$
Bestimmen Sie sein Punktspektrum, und zeigen Sie, daß jeder seiner Eigenwerte unendliche Vielfachheit hat (also $\dim\ker(T-\lambda) = \infty$ für jedes $\lambda \in \sigma_p(T)$).

2. Auf $\ell^2(\mathbb{Z})$ definieren wir den üblichen Rechtsshift–Operator S_R wie in der Vorlesung. Bestimmen Sie dessen Spektrum (also $\varrho(S_R)$, $\sigma_p(S_R)$, $\sigma_c(S_R)$, $\sigma_r(S_R)$).

3. Sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und T aus $\mathcal{L}(X)$. Die Menge $\sigma_{\mathrm{ap}(T)}$ der approximativen Eigenwerte von T ist definiert als die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, für die es eine Folge $(x_1, x_2, \dots) \subset X$ gibt mit $\|x_n\|_X = 1$ und $\|(T-\lambda)x_n\|_X \to 0$. Zeigen Sie, daß $\sigma_{\mathrm{ap}}(T) \subset \sigma(T)$.

4. Zeigen Sie: die Integralgleichung
$$f(t) - \frac{1}{2}\int_{s=0}^{1} tsf(s)\,\mathrm{d}s = \frac{5}{6}t, \qquad t \in [0,1],$$
besitzt eine eindeutige Lösung in $C([0,1])$. Man bestimme diese mittels Neumannscher Reihe.