Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

28.05.2010

Übungen zur Funktionalanalysis, Blatt 7

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 04.06.2010, in den Briefkästen auf F 4.
Für Halbsemesterstudierende ist dies das letzte Blatt.

Eine Umgebungsbasis (zu einem Punkt x) für die schwache Topologie in einem Banachraum X wird gegeben durch

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}_+} \left\{ \left\{ y \in X\colon |f_j(x-y)| < \frac{1}{n}, \quad \forall\, j = 1, \ldots, m \right\} : n \in \mathbb{N}_+, \quad \forall\, f_1, \ldots, f_m \in X' \right\}.$$

Ein linearer Operator $T\colon X \to Y$ zwischen zwei Banachräumen heißt *kompakt*, wenn das Bild der Einheitskugel in X eine Menge ist, deren Abschluß in Y kompakt ist.

1. Sei X ein unendlich-dimensionaler Banachraum. Zeigen Sie, daß der Abschluß der Einheitskugelhülle $\{x \in X\colon \|x\| = 1\}$ in der schwachen Topologie gerade die gefüllte Einheitskugel $\{x \in X\colon \|x\| \leq 1\}$ ist.

   Hinweis: Betrachten Sie $x + \lambda z$ mit $z \in H := \cap_{j=1}^{n} \ker f_j$ für $f_1, \ldots, f_m \in X'$. Zeigen Sie, daß $\dim X/H < \infty$ und also $\dim H = \infty$ (und folglich $H \neq \{0\}$).

2. Sei X ein Hilbertraum. Es bezeichne X_w bzw. X_n den Raum X, versehen mit der schwachen bzw. der Normtopologie. Zeigen Sie, daß ein linearer Operator $T\colon X_w \to X_n$ genau dann stetig ist, wenn $R(T)$ endlich-dimensional ist.

   Hinweis: Verwenden Sie den vorigen Hinweis mit $x = 0$.

3. Sei $k\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ stetig, und K sei der Integraloperator zur Kernfunktion k, das heißt
$$(Kf)(t) := \int_{s=0}^{1} k(t,s) f(s)\,\mathrm{d}s, \qquad f \in C([0,1]).$$
   Beweisen Sie:

   - Der Operator K ist eine stetige Abbildung von $X := C([0,1])$ in sich, mit der Norm
$$\|K\|_{\mathcal{L}(X,X)} = \sup_{t\in[0,1]} \int_{s=0}^{1} |k(t,s)|\,\mathrm{d}s.$$
   - Der Operator K ist kompakt.

4. Mit der Situation der vorigen Aufgabe sei speziell $k(s,t) = 0$ für $s \geq t$.

   - Betrachte die Volterra–Integralgleichung
$$f(t) = g(t) + \int_{s=0}^{t} k(t,s) f(s)\,\mathrm{d}s.$$
     Zeigen Sie, daß $\|K^n\| \leq \frac{M^n}{n!}$ mit $M := \sup_{t\geq s} |k(t,s)|$ ist. Schlußfolgern Sie, daß die Volterra–Integralgleichung für jede Funktion $g \in C([0,1])$ genau eine Lösung $f \in C([0,1])$ besitzt.
   - Bestimmen Sie das Spektrum $\sigma(K)$ von K.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Sei X ein Banachraum, und A, $B \in \mathcal{L}(X, X)$. Zeigen Sie: wenn $\mathrm{id} - AB$ invertierbar ist, dann ist $\mathrm{id} + B(\mathrm{id} - AB)^{-1}A$ das Inverse zu $\mathrm{id} - BA$. Und es ist $\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}$.

Die Klausur findet am 26.07. nachmittags statt.