Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

04.06.2010

Übungen zur Funktionalanalysis, Blatt 8

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 11.06.2010, in den Briefkästen auf F 4.

1. Zeigen Sie zunächst: es ist nicht möglich, die Menge der irrationalen Zahlen im Intervall $[0, 1]$ zu schreiben als abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen.

   Zeigen Sie darauf aufbauend: es gibt keine Funktion, die in jedem rationalen Punkt von $[0, 1]$ stetig ist, und unstetig in jedem irrationalen Punkt aus $[0, 1]$.

2. Seien X_1, X_2, X_3 Banachräume, $T\colon X_1 \to X_2$ sei linear, $S\colon X_2 \to X_3$ sei linear, injektiv, stetig; und die Komposition $S \circ T\colon X_1 \to X_3$ sei stetig.

   Zeigen Sie (mit Argumentation über die Graphen von Abbildungen), daß auch T stetig ist.

3. Seien X_1 und X_2 normierte Räume, Y ein linearer Unterraum von X_1, und sei $T\colon Y \to X_2$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie:

   (a) Durch $\|y\|_T := \|y\|_{X_1} + \|Ty\|_{X_2}$ für $y \in Y$ wird Y zu einem normierten Raum Y_T.

   (b) Wenn X_1 und X_2 sogar Banachräume sind, und wenn T graphen–abgeschlossen ist, und Y ein abgeschlossener Unterraum von X_1, dann ist Y_T ein Banachraum, und es ist $T\colon Y_T \to X_2$ stetig.

4. Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum, und seien A_1, A_2, … lineare stetige Operatoren von X nach Y. Die Folge $(A_1, A_2, \dots)$ konvergiere punktweise gegen eine Abbildung $A\colon X \to Y$.

   Zeigen Sie: die Folge der Normen $\|A_n\|_{X\to Y}$ ist beschränkt, A ist linear und stetig, und es ist $\|A\|_{X\to Y} \le \liminf_{n\to\infty} \|A_n\|_{X\to Y}$.

   Sei nun Z ein normierter Raum (nicht unbedingt vollständig). Zeigen Sie: falls $(z_1, z_2, \dots)$ eine Folge in Z ist, die schwach gegen einen Grenzwert $z \in Z$ strebt, dann ist $\|z\|_Z \le \liminf_{n\to\infty} \|z_n\|_Z$.

Die Klausur findet am 26.07. nachmittags statt.