Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

18.06.2010

Übungen zur Funktionalanalysis, Blatt 10

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 25.06.2010, in den Briefkästen auf F 4.

1. Sei X ein Banachraum, und sei $K\colon X \to X$ ein linearer kompakter Operator. Zeigen Sie:
   - $\ker(I-K)$ ist endlichdimensional
   - wenn $I-K$ injektiv ist, dann ist $(I-K)^{-1}$ stetig, und der Bildraum von $I-K$ ist abgeschlossen

2. Seien X und Y Banachräume, und seien $L(X,Y)$ sowie $K(X,Y)$ die Vektorräume der linearen stetigen bzw. linearen kompakten Abbildungen von X nach Y, jeweils ausgestattet mit der Norm $\|\cdot\|_{L(X,Y)}$. Zeigen Sie, daß $K(X,Y)$ ein *abgeschlossener* Untervektorraum von $L(X,Y)$ ist.

3. Sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und $T \in L(X)$. Beweisen Sie:
   (a) Wenn $\langle Tx, x\rangle = 0$ für jedes $x \in X$, dann ist $T = 0$.
   (b) Es ist $\|T^*x\| = \|Tx\|$ für jedes $x \in X$, wenn T ein normaler Operator ist.
   (c) Es ist $\|(T^*)^n x\| = \|T^n x\|$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $x \in X$ genau dann, wenn T ein normaler Operator ist.
   (d) Gilt die erste Aussage auch für reelle Hilberträume ?

4. Sei X ein normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt *schwache Cauchyfolge*, wenn für jedes $f \in X'$ die Zahlenfolge $(f'(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.
   - Sei X ein reflexiver normierter Raum. Zeigen Sie: eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ ist genau dann schwach$-*-$konvergent, wenn sie schwach konvergiert.
   - Zeigen Sie: jede schwache Cauchyfolge in einem normierten Raum (nicht unbedingt reflexiv) ist beschränkt.
   - Zeigen Sie: in einem reflexiven Banachraum konvergiert jede schwache Cauchyfolge schwach.
   - Sei $X = c_0$, der Raum der nach Null konvergierenden Zahlenfolgen. Zeigen Sie: $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ mit
   $$x^{(n)} = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots) \qquad (n \text{ Einsen})$$
   ist eine schwache Cauchyfolge in X, die nicht schwach konvergiert.
   Hinweis: Blatt 6, Aufgabe 3

Die Klausur findet am 26.07. nachmittags statt.