Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

02.07.2010

Übungen zur und Ausblick auf die Funktionalanalysis, Blatt 12

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 09.07.2010, in den Briefkästen auf F 4.

1. Sei X ein Hilbertraum, und seien A, $B \in L(H)$, sodaß $A - B$ ein kompakter Operator ist. Beweisen Sie, daß $\sigma(A) \setminus \sigma_p(A) \subset \sigma(B)$ gilt.

   Das bedeutet: eine kompakte Störung läßt die Punkte des Spektrums, die keine Eigenwerte sind, unverändert.

2. **(Holomorpher Funktionalkalkül)**

   Sei X ein Hilbertraum und $T \in L(X)$. Zeigen Sie: ist f ein Polynom, so gilt

$$f(T) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\Gamma f(\lambda)(\lambda - T)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda.$$

   Hierbei ist Γ ein positiv orienterte Kreis um 0, mit Radius $r > r(T)$ (Spektralradius).

   Anmerkung: ist f auf einer Obermenge von $\sigma(T)$ holomorph (und somit als Potenzreihe darstellbar), so definiert diese Gleichung einen holomorphen Funktionalkalkül.

3. Es sei X ein **reeller** Hilbertraum, und $T \in L(X)$ sei normal. Beweisen Sie: es gibt eine eindeutige Zerlegung $T = A + JB$, wobei $A = \frac{1}{2}(T + T^*)$, $B = (C^*C)^{1/2} \geqslant 0_{L(X)}$ mit $C = \frac{1}{2}(T - T^*)$ und $J = -J^*$, $JB = BJ$, $\ker B = \ker J$, sodaß J eine partielle Isometrie ist (das heißt: eine Isometrie auf $(\ker J)^\perp$).

   Hinweis: Man definiere $J = \text{s-lim}_{n\to\infty} C f_n(C^*C)$, wobei

$$f_n(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & : t \geq 1/n, \\ 0 & : t < 1/n. \end{cases}$$

   Um die Existenz des starken Limes zu zeigen, untersuche man $\|Cf_n(C^*C)x - Cf_m(C^*C)x\|^2$ und benutze den Funktionalkalkül über die Spektralzerlegung von C^*C.

   Bemerkung: hier gibt es eine Querverbindung zur elementaren Algebra: jede komplexe Zahl $w = u + \mathrm{i}v$ kann geschrieben werden als

$$w \sim \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix},$$

   und Addition / Subtraktion / Multiplikation komplexer Zahlen entsprechen den jeweiligen Operationen von Matrizen. Weiterhin ist

$$\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{sign}(v) \\ \operatorname{sign}(v) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |v| & 0 \\ 0 & |v| \end{pmatrix},$$

   und rechts steht gerade $A + JB$, wenn man die Matrix links T tauft.

Die Klausur findet am 26.07. von 14:00 bis 16:00 im Audimax statt.