Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

23.10.2009

Übungen zur Mathematik für Physiker III, Blatt 1

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 30.10.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Eine Luftblase befindet sich am Boden eines mit zäher Flüssigkeit gefüllten Gefäßes (z.B. Shampoo–Flasche). Durch den Auftrieb steigt sie nach oben. Die Auftriebskraft ist proportional zum Volumen der Blase, die Reibungskraft ist durch

   $$F_R = 6\pi r\eta v$$

   gegeben. Hierbei ist r der Radius der Blase, η die Viskosität der Flüssigkeit und v die momentane Geschwindigkeit der Vakuole.

   Man stelle eine Differentialgleichung für den Ort der Luftblase auf und löse sie durch Probieren.

   Wie hängt die Grenzgeschwindigkeit vom Radius ab ?

2. **(Aufpassen bei impliziten Differentialgleichungen)**

   Zu der Differentialgleichung $y = xy' + \frac{1}{4}(y')^2$ bestimme man durch Raten eine ganze Schar von Lösungen. Anschließend stelle man diese Lösungen graphisch dar und finde so eine weitere Lösung, die nicht in der Schar enthalten ist.

3. Durch Raten ermittle man Lösungen zu den Anfangswertproblemen

   $$\begin{aligned} y'(x) &= y^2(x), & y(0) &= 1,\\ y'(x) &= 1 + y^2(x), & y(0) &= 0,\\ y'(x) &= 1 + y^2(x), & y(0) &= 1,\\ y'(x) &= 1 - y^2(x), & y(0) &= 0,\\ y'(x) &= \sqrt{|y(x)|}, & y(0) &= 0, \end{aligned}$$

   wobei beim letzten Problem unendlich viele Lösungen zu finden sind.

4. (a) Man zeige, daß für quadratische Matrizen A, B die folgenden Reihen konvergieren:

   $$\sin A := A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} \mp \cdots, \qquad \cos A := I - \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} \mp \cdots .$$

   Man beweise, daß das Additionstheorem

   $$\sin(A + B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$$

   gilt, falls $AB = BA$.

   (b) Mit Hilfe der Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ zeige man, daß normalerweise e^{A+B} und $e^A e^B$ verschieden sind.