

## Übungen zur Mathematik für Physiker III, Blatt 2

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 06.11.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

- Lösen Sie das logistische Modell  $u'(t) = \alpha u - \beta u^2$  mittels Trennung der Variablen und mittels Bernoulli-Methode. Was passiert, wenn der Anfangswert zur Zeit 0 negativ ist, oder sehr stark positiv?
  - Man knacke die Differentialgleichung  $y'(x) = xy$  mit zugehöriger Anfangsbedingung  $y(0) = 1$  mittels Trennung der Variablen und Potenzreihenansatz.
- Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

$$y'(t) = \frac{\sin t}{\cos y(t)}, \quad y(0) = 1,$$

$$y'(t) = t^2 + 2ty(t) + (y(t))^2, \quad y(0) = 0,$$

$$y'(t) = -\left(\frac{y(t)}{t+1}\right)^2, \quad y(0) = 1,$$

$$y'(t) = \frac{y}{t} - \frac{t^2}{y^2}, \quad y(1) = 1$$

- Bei einer chemischen Reaktion reagieren je ein Molekül der Stoffe  $A$  und  $B$  zu einem Molekül des Stoffes  $C$ . Es seien  $\alpha$  und  $\beta$  die Anfangskonzentrationen von  $A$  und  $B$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  und  $u(t)$  die Konzentration von  $C$ . Dann gilt nach dem Massenwirkungsgesetz

$$\frac{du}{dt} = r(\alpha - u)(\beta - u), \quad u(0) = 0$$

mit einer Reaktionskonstanten  $r$ .

Man bestimme  $u(t)$ . Was ist der Grenzwert von  $u(t)$  für  $t \rightarrow \infty$ ? (Man unterscheide hierbei die Fälle  $\alpha < \beta$  und  $\beta < \alpha$ .)

- Im Nullpunkt eines  $x, y$ -Koordinatensystems befinde sich ein elektrischer Dipol, dessen Achse in der  $x$ -Richtung liege. Führt man Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  ein, so genügen seine Feldlinien der Differentialgleichung

$$\frac{dr}{d\varphi} = 2r \cot \varphi.$$

Man bestimme die Gleichung  $r = r(\varphi)$  dieser Feldlinien und skizziere einige von ihnen.

## Aufgabe zum Knobeln

5. Ein Kaugummi von 1 Meter Länge ist mit einem Ende an der Stadtmauer von Troja festgeklebt. Auf dem anderen Ende sitzt eine Schnecke, mit dem Blick zur Mauer. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  beginnt Achilles loszulaufen, mit der Geschwindigkeit von 10 Metern pro Sekunde senkrecht von der Mauer weg und dem losen Ende des Kaugummis in der Hand. Gleichzeitig beginnt die Schnecke, in Richtung zur Mauer zu kriechen, mit einer Geschwindigkeit von 1 mm/s bezogen auf den Kaugummi unter sich. Nach wieviel Jahren erreicht die Schnecke die Mauer ?

*Hinweis:* es sind endlich viele Jahre !