Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

06.11.2009

Übungen zur Mathematik für Physiker III, Blatt 3

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 13.11.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Zwei Tanks K_1 und K_2 enthalten zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ je 1000 Liter 5%-ige oder 2%-ige Salzlösung. Ab diesem Zeitpunkt laufen pro Minute 60 Liter reines Wasser von außen in den Tank K_1, werden pro Minute 80 Liter von K_1 nach K_2 gepumpt, pro Minute 20 Liter von K_2 nach K_1, und 60 Liter laufen von K_2 ab.

   Wieviel Salz ist zum Zeitpunkt t in den Tanks ? Was passiert für $t \to \infty$? Wie ändert sich die Situation, wenn von außen 10%-ige Salzlösung in K_1 einfließt ?

2. Seien $\psi_k \colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $1 \le k \le n$, stetig differenzierbare Funktionen, und $W(t) = W(\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$ die zugehörige Wronski–Determinante. Sei $[c,d] \Subset [a,b]$ ein echtes Teilintervall, und seien $\varphi_k = \psi_k|_{[c,d]}$ die Einschränkungen auf dieses Teilintervall. Man untersuche (Beweis oder Gegenbeispiel), ob die folgenden Aussagen stimmen:

   (a) Wenn $W(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in [a,b]$, dann sind die $\psi_1, \dots, \psi_n$ linear unabhängig.

   (b) Wenn $W(t_0) = 0$ für ein $t_0 \in [a,b]$, dann sind die $\psi_1, \dots, \psi_n$ linear abhängig.

   (c) Wenn $W(t) = 0$ für jedes $t \in [c,d]$, dann folgt auch $W(t) = 0$ für jedes $t \in [a,b]$.

   (d) Wenn die $\psi_1, \dots, \psi_n$ linear unabhängig sind, dann auch die $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

   (e) Wenn die $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ linear unabhängig sind, dann auch die $\psi_1, \dots, \psi_n$.

   Man löse diese Aufgabe erneut, aber diesmal unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß der Vektor der Funktionen ψ_k Lösung eines Systems $\dot{\psi}(t) = A(t)\psi(t)$ ist, wobei $A(t)$ eine auf $[a,b]$ stetige Matrixfunktion ist.

3. (a) Die Konzentration $c(t)$ einer Mikroorganismenpopulation in einem Reaktor genügt der Differentialgleichung
   $$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = \frac{k_1 c}{k_2 + c}.$$
   Hierbei sind k_1 und k_2 gewisse positive Konstanten. Man knacke diese Dgl (ggf. t als Funktion von c suchen).

   (b) Ein Körper fällt unter dem Einfluß der Schwerkraft und erfährt eine Reibungskraft, die proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist. Man bestimme die Geschwindigkeit $v(t)$, wenn $v(0) = 0$ ist.

4. (a) Man bestimme durch geeigneten Ansatz die allgemeine Lösung zu $x^2 y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0$.

   (b) Man bestimme die allgemeine Lösung zu $(x + y(x)) + xy'(x) = 0$ auf drei Wegen: als homogene Dgl mit geeigneter Transformation und Substitution, als exakte Dgl, und durch Zerlegung in einen homogenen Anteil (zur allgemeinen Lösung davon: siehe (a)) und einen inhomogenen Anteil.