Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

13.11.2009

Übungen zur Mathematik für Physiker III, Blatt 4

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 20.11.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Wiederkäuer lagern das ungekaute Futter zuerst im Pansen. Dann gelangt es (nach dem Kauen) in den Labmagen und von dort in den Darm. Die Mengen von Futter im Pansen, Labmagen, Darm bezeichnen wir mit m_1, m_2 und m_3. Dann gelte das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} m_1' &= -k_1 m_1, \\ m_2' &= k_1 m_1 - k_2 m_2, \\ m_3' &= k_2 m_2. \end{aligned}$$

   Hierbei bezeichnet k_1, welcher Anteil des Futters im Pansen von dort in den Labmagen übertritt. Analog gibt k_2 an, welcher Anteil des Futters im Labmagen in den Darm überwechselt. Man löse dieses Differentialgleichungssystem unter den Anfangsbedingungen $m_1(0) = M$, $m_2(0) = 0$, $m_3(0) = 0$.

2. Gegeben sei die LEGENDREsche Differentialgleichung

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   Man zeige mittels Potenzreihenansatz, daß Polynome $n$ten Grades als Lösung vorkommen. Dann bestimme man die allgemeine Lösung mittels dieser Polynome (D'ALEMBERTSCHES Reduktionsverfahren. Das heißt: wenn y_1 die Polynomlösung ist, dann macht man für y_2 den Ansatz $y_2(x) = u(x)y_1(x)$). Was können Sie über den Graphen der zweiten Lösung aussagen ?

3. Man bestimme die Lösung zu

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} \vec{y}, \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Gesucht ist die allgemeine Lösung $y = y(x)$ der Differentialgleichung

$$y'''' + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = xe^{-x}.$$

Hinweis: die Leibniz-Regel für höhere Ableitungen könnte nützlich sein.