Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

20.11.2009

Übungen zur Mathematik für Physiker III, Blatt 5

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 27.11.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Gegeben sei das folgende lineare System

$$x'(t) = a(t)x - b(t)y, \qquad y'(t) = b(t)x + a(t)y.$$

   (a) Zeigen Sie, daß dieses System auf eine einzige lineare Gleichung $z'(t) = c(t)z$ für $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ zurückgeführt werden kann.
   (b) Leiten Sie für $v(t) := |z(t)|^2$ eine lineare Differentialgleichung her.
   (c) Lösen Sie das System für $a(t) = \cos(t)$ und $b(t) = \sin(t)$.
   (d) Skizzieren Sie in der xy–Ebene den Orbit der Lösung mit $(x(0), y(0)) = (1, 0)$. Bestimmen Sie für diese Lösung $v(t)$, und finden Sie zwei Schranken $0 < \alpha \leq v(t) \leq \beta$.
   (e) Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix $Y = Y(t)$ mit $Y(0) = I$, und deren Wronski–Determinante.

2. Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Systeme:

$$\begin{cases} x' = x - y - z, \\ y' = x + 3y + z, \\ z' = -3x + y - z, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 8x + 12y - 2z, \\ y' = -3x - 4y + z, \\ z' = -x - 2y + 2z. \end{cases}$$

3. Durch Variation der Konstanten bestimme man die Lösung von

$$u' = -u + 4v + e^{3t}, \qquad v' = -u + 3v - 1, \qquad u(0) = v(0) = 0.$$

4. Lösen Sie die folgenden Euler–Differentialgleichungen für $x > 0$:

$$x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0,$$
$$y''(x) + \frac{5}{x} y'(x) + \frac{5}{x^2} y(x) = 0.$$

Hinweis: Substitution $x = e^t$ und $y(x) = u(t)$