Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher
27.11.2009

Übungen zur Mathematik für Physiker III, Blatt 6

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 04.12.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Man zeige an einem Beispiel, daß sich die Orbits von Lösungen einer *nicht*autonomen Differentialgleichung
$$x'(t) = f(t, x)$$
doch schneiden können.

2. Betrachte das System
$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -2x_1 - ax_2 - 3x_1^2, \end{aligned}$$
wobei $a > 0$. Man zeige:
   (a) $(0, 0)^\top$ ist asymptotisch stabil, und $(-2/3, 0)^\top$ ist ein Sattelpunkt
   (b) Die Energie im reibungsfreien Fall ($a = 0$) ist $V(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1^3$. Man zeichne einige Niveaulinien von V.
   (c) Wenn $x_0 \in \mathbb{R}^2$ und $\gamma_+(x_0)$ beschränkt ist, dann enthält $\omega(x_0)$ einen der beiden Gleichgewichtspunkte. (Dazu verwende man Sätze aus der Vorlesung und überlege sich, wie sich V entlang eines Orbits verhält.)

   Man skizziere das Phasenporträt für $a = 3$.

3. Für das ebene System
$$x_1' = x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \qquad x_2' = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$
sind Gleichgewichtspunkte und die ω–Limesmengen zu bestimmen. Falls Grenzzyklen auftreten sollten, ist nach deren Stabilität gefragt.
Hinweis: Polarkoordinaten

4. Betrachte die Gleichung zweiter Ordnung $y''(t) + g(y(t)) = 0$, bzw. (mit $x_1 = y$ und $x_2 = y'$)
$$x_1' = x_2, \qquad x_2' = -g(x_1).$$
   (a) Zeige, daß $H = x_2^2/2 + G(x_1)$ ein Hamiltonian ist, mit G als Stammfunktion zu g.
   (b) Zeige, daß jeder periodische Orbit die x_1–Achse in genau zwei Punkten a und b schneidet, mit $a < b$. *Hinweis:* Eindeutigkeitsprinzip
   (c) Zeige mit Symmetrieargumenten, daß die Umlaufzeit gegeben ist durch
$$T = 2\int_{u=a}^{b} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2(G(b) - G(u))}}.$$