Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

04.12.2009

# Übungen zur Mathematik für Physiker III, Blatt 7

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 11.12.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Gegeben ist ein Behälter (z.B. ein Eimer). In Höhe $h$ über dem Boden hat er die Querschnittsfläche $F(h)$. Im Boden ist ein Loch mit der Querschnittsfläche $A$. Durch dieses Loch strömt die (ideale) Flüssigkeit aus, und zwar mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$, wobei $g$ die Erdbeschleunigung ist und $h = h(t)$ die Flüssigkeitshöhe zur Zeit $t$.
   (a) Man stelle eine Differentialgleichung auf für $h = h(t)$.
   (b) Man löse diese Differentialgleichung, wenn der Behälter ein *stehender* Kreiszylinder ist mit der Höhe $H$ und dem Radius $R$.
   (c) Man löse diese Differentialgleichung, wenn der Behälter ein *liegender* Kreiszylinder ist mit der Höhe $H$ und dem Radius $R$.

2. Durch die Gleichung $y = Ce^x$ mit $C \in \mathbb{R}$ wird eine Funktionenschar gegeben. Man finde dazu die Orthogonaltrajektorien (also eine zweite Funktionenschar, sodaß die Graphen der Funktionen aus den beiden verschiedenen Scharen sich jeweils senkrecht schneiden).

   Analog für die Kurvenschar $y^2 - x^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$.

   *Hinweis:* Man überlege sich Differentialgleichungen für die Funktionen der vier Scharen.

3. Die Bewegung eines Teilchens der Ladung $q$ und Masse $m$ im elektromagnetischen Feld ist beschrieben durch
$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = q(E + v \times B),$$
   wobei $v$ der Geschwindigkeitsvektor ist, und $E = (E_1, E_2, E_3)^\top$ sowie $B = (B_1, B_2, B_3)^\top$ das elektrische bzw. magnetische Feld. Diese Felder sind konstant, aber über die Richtungen dieser Felder sei nichts bekannt.

   Man gebe die Lösung $v = v(t)$ in verstehbarer Form an (Ausdrücke der Form $\exp(At)$ seien heute geometrisch nicht verstehbar).

4. Die zeitabhängige Schrödinger–Gleichung ist
$$-\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \triangle + V(x)\right)\psi(t,x),$$
   wobei $\mathrm{i}^2 = -1$ ist, $\hbar$ das Planck–Quantum, $m$ die Masse des Teilchens, $\triangle = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ der Laplace–Operator im $\mathbb{R}^3$, und $V = V(x)$ das reellwertige Potential, in dem das Teilchen sich befindet. Die Wellenfunktion $\psi = \psi(t,x)$ ist komplexwertig.

   Definiere $\varrho(t,x) := \psi(t,x)\overline{\psi(t,x)}$.

   Gesucht ist eine Vektorfunktion $j = j(t,x)$, für die die Erhaltungsgleichung
$$\frac{\partial\varrho(t,x)}{\partial t} + \operatorname{div} j(t,x) = 0$$
   gilt (für alle $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$). Kann $j$ eine reellwertige Funktion sein ?

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Man zeige: wenn die Matrix $A$ schiefsymmetrisch ist, dann ist $e^A$ orthogonal.