Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

11.12.2009

Übungen zur Mathematik für Physiker III, Blatt 8

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 18.12.2009, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Man finde jeweils alle Lösungen des Randwertproblems zur Differentialgleichung $y''(t) + 4y(t) = 0$:
   (a) $y(0) = 1$, $y(1) = 1$,
   (b) $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = -1$,
   (c) $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = -2$.

2. Das Eigenwertproblem zur zeitunabhängigen Schrödingergleichung ist
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \triangle + V(x)\right) u(x) = E u(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3,$$
wobei $\triangle = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$. Man zeige: wenn sich das reellwertige Potential V schreiben läßt als
$$V(x) = V_1(x_1) + V_2(x_2) + V_3(x_3),$$
dann kann die zeitunabhängige Schrödingergleichung zerlegt werden in ein Tripel von eindimensionalen Gleichungen der Form
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_j^2} u(x_j) + \frac{2m}{\hbar^2}(E_j - U_j(x_j))u(x_j) = 0, \qquad j = 1, 2, 3,$$
wobei $u(x) = u_1(x_1)u_2(x_2)u_3(x_3)$ und $E = E_1 + E_2 + E_3$.
Man überlege, ob diese Zerlegung eine äquivalente Umformung darstellt.

3. Gegeben sei der Wert $\pi/2$ des Integrals $\int_{x=0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. Damit bestimme man den Wert von $I = \int_{x=0}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$, indem man für
$$I(\lambda) = \int_{x=0}^{\infty} \frac{\sin^2(\lambda x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
eine Differentialgleichung findet.

4. Sei $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine konstante Matrix, $a \in \mathbb{R}^n$ ein konstanter Vektor, und gesucht ist eine vektorwertige Funktion $u = u(t)$ als Lösung zu
$$u'(t) = Lu(t) + (u(t) \cdot a)u(t), \qquad u(0) = u_0.$$
Hierbei ist $u(t) \cdot a$ das Skalarprodukt der Vektoren $u(t)$ und a.

Hinweis: Ansatz $u(t; u_0) = f(t)v(t; u_0)$ mit skalarem f und vektorwertigem v.