Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

18.12.2009

Übungen zur Mathematik für Physiker III, Blatt 9

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 08.01.2010, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Berechnen Sie die Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenfunktionen folgender Randwertaufgabe:
$$u''(t) + \lambda u(t) = 0, \qquad u(0) + u'(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$
Hinweis: denken Sie über die Lage der Lösungen der Gleichung $\tan s = s$ nach.

2. Aus der Rodrigues–Formel für die Legendre–Polynome zeige man Schritt für Schritt:
$$\begin{aligned} P'_{n+1}(t) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}} (t(t^2-1)^n), \\ P'_{n+1}(t) &= (2n+1)P_n(t) + P'_{n-1}(t), \\ P'_{n+1}(t) &= tP'_n(t) + (n+1)P_n(t), \\ (2n+1)P_n(t) &= P'_{n+1}(t) - P'_{n-1}(t), \\ (n+1)P_n(t) &= P'_{n+1}(t) - tP'_n(t), \end{aligned}$$
und darauf aufbauend dann endlich die Rekursionsformel
$$(n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)tP_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0.$$
Hinweis: Leibniz-Formel für $\partial_t^k(f(t)g(t)) = \dots$ könnte hilfreich sein.

3. Die Hermite–Polynome sind definiert durch $H_n(t) = (-1)^n \exp(t^2)\partial_t^n(\exp(-t^2))$.
Setze $\psi(t,r) = \exp(t^2)\exp(-(r-t)^2) = \exp(-r^2+2rt)$. Man beweise, daß
$$\left.\frac{\partial^n \psi(t,r)}{\partial r^n}\right|_{r=0} = H_n(t),$$
und daraus schlußfolgere man, daß
$$\psi(t,r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!} r^n,$$
für $t, r \in \mathbb{R}$. Es ist nicht trivial, ob diese Reihe wirklich für alle $r \in \mathbb{R}$ konvergiert (aber das soll ignoriert werden).

4. Basierend auf
$$L_{n,\alpha}(t) = \frac{1}{n!} t^{-\alpha} e^t \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(e^{-t}t^{n+\alpha})$$
und der Leibniz-Regel für höhere Ableitungen von Produkten von Funktionen zeige man
$$L_{n,\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n!} \binom{n}{k} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} t^k,$$
mit Γ als der Gamma–Funktion, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ für $s > 0$.