Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

08.01.2010

Übungen zur Mathematik für Physiker III, Blatt 10

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 15.01.2010, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Es sei $f(z) = z^3$. Man zeige, daß KEIN Punkt c auf der Verbindungsstrecke von i nach 1 existiert, für den
$$\frac{f(\mathrm{i}) - f(1)}{\mathrm{i} - 1} = f'(c)$$
gilt. Der Mittelwertsatz gilt also nicht !

2. Man bestimme die holomorphe Funktion $w = u + \mathrm{i}v$, für die
$$u(x, y) = x^2 - y^2 + xy, \quad w(0) = 0$$
gilt. (Es sei hierbei $z = x + \mathrm{i}y$, wie immer.)

3. Man zeige, daß Realteil und Imaginärteil des Hauptzweigs des komplexen Logarithmus die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen lösen.

4. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch,* wenn $\triangle h(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

   Sei h harmonisch. Man finde eine holomorphe Funktion f mit $h \equiv \Re f$.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Man berechne für jedes $n = 0, 1, 2, \dots$ den Ausdruck $(1 + \mathrm{i})^n + (1 - \mathrm{i})^n$.