Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

22.01.2010

Übungen zur Mathematik für Physiker III, Blatt 12

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 29.01.2010, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Sei f eine ganze Funktion, für die es Konstanten C, $N \in \mathbb{N}$ und R gibt, sodaß die Ungleichung $|f(z)| \leq C|z|^N$ gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$. Man beweise, daß dann f ein Polynom vom Grad $\leq N$ sein muß.

2. Es seien Ln und $\sqrt{\cdot}$ die Hauptzweige, mit Schnitt entlang von $\mathbb{R}_-$. Man finde Zahlen z_1 und z_2, sodaß
$$\mathrm{Ln}(z_1 z_2) \neq \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}(z_2)$$
bzw.
$$\sqrt{z_1 z_2} \neq \sqrt{z_1}\sqrt{z_2}.$$
Weiterhin beweise man, daß $\mathrm{i}^{\mathrm{i}} \in \mathbb{R}$ wenn $\mathrm{i}^2 = -1$.

3. Sei Γ die Einheitskreislinie, in Gegenuhrzeigersinn durchlaufen. Man bestimme die Werte der Integrale
$$\oint_\Gamma \frac{\cos z}{z}\,\mathrm{d}z, \qquad \oint_\Gamma \frac{\cos z}{z^2}\,\mathrm{d}z, \qquad \oint_\Gamma \frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z.$$

4. Es seien κ und ε reelle Konstanten. Gesucht ist eine **ganze** Funktion $w = w(z)$ als Lösung der Differentialgleichung
$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} - \frac{\varepsilon + \kappa^2}{z + \kappa} + \kappa\right) w(z) = 0, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$
Für welche ε und κ gibt es nichttriviale Lösungen w ?

Bargmann–Darstellung des deformierten harmonischen Oszillators

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

Es seien a_0, a_1, …, a_n die Ziffern einer im Dezimalsystem $(n+1)$–ziffrigen Zahl A, also
$$A = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0, \qquad 1 \leq a_n \leq 9, \quad 0 \leq a_{n-1}, \ldots, a_0 \leq 9.$$
Sei $P = P(z)$ das Polynom $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$.

Man beweise: die Nullstellen von P können nur in der linken Halbebene oder im Kreis
$$\left\{ z \in \mathbb{C} \colon |z| < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{37}) \right\}$$
liegen, aber nirgendwo sonst.

Die Klausur ist am 19.02., von 16:00 bis 18:00 Uhr im R711 und R712.