Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

29.01.2010

Übungen zur Mathematik für Physiker III, Blatt 13

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 05.02.2010, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Man bestimme die Residuen der Gamma–Funktion in den Punkten 0, -1, -2.

2. Auf $\mathbb{R}^1$ definieren wir die Funktion $f(x) = e^{-|x|}$.

   Durch direktes Ausrechnen des Integrals bestimme man die Fourier–Transformierte $\hat{f}$.

   Mittels Residuensatz zeige man, daß die Fourier–Rücktransformierte von $\hat{f}$ tatsächlich f ist.

3. Für $\alpha > -1$, $x > 0$, $t \in \mathbb{C}$ mit $|t| < 1$ definieren wir Funktionen $c_{n,\alpha}(x)$ als Taylorkoeffizienten:

$$(1-t)^{-\alpha-1} e^{-xt/(1-t)} =: \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,\alpha}(x) t^n.$$

   (a) Stellen Sie die $c_{n,\alpha}$ als Kurvenintegral dar:

$$c_{n,\alpha}(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\Gamma ???\,\mathrm{d}t,$$

   mit geeignet zu wählendem Γ und Integranden, der x als Parameter enthält.

   (b) Substituieren Sie $t \mapsto u$ gemäß $u = x/(1-t)$ (die Kurve Γ muß natürlich mittransformiert werden).

   (c) Werten Sie das neue Integral aus (Residuensatz), und zeigen Sie, daß

$$c_{n,\alpha}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}u^n} e^{-u} u^{n+\alpha} \right)_{|u=x}.$$

Die Klausur ist am 19.02., von 16:00 bis 18:00 Uhr im R711 und R712.