Mathematische Ergänzungen zur Funktionentheorie

Michael Dreher
Fachbereich für Mathematik und Statistik
Universität Konstanz

Studienjahr 2010/11

Einleitung

Das zur Vorlesung *Funktionentheorie Sommersemester 2011* empfohlene Skript zur *Mathematik für Physiker III* enthält einige Passagen, die den in der Mathematik üblichen Anforderungen nicht genügen. Mit den hier vorgestellten Ergänzungen wollen wir diese Passagen ausbessern.

1 Zu Kapitel 8

Hier ist insbesondere Satz 8.14 zu verbessern. Dessen Aussage ist richtig, aber der vorgeschlagene Beweis benutzt das Konzept, daß eine Kurve Γ einen Punkt p „evtl. mehrfach umläuft“. Es ist unklar, was das bedeuten soll. Deshalb holen wir hier etwas weiter aus.

Definition 1.1 (einfach zusammenhängend). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Wir sagen, daß Ω* einfach zusammenhängend *ist, wenn folgendes gilt: zu jeder Schleife $\Gamma \subset \Omega$ mit Parametrisierung $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$, $\gamma(0) = \gamma(1)$, existiert ein Punkt $p \in \Omega$ und eine stetige Funktion*

$$h\colon [0,1] \times [0,1] \to \Omega, \qquad (s,t) \mapsto h(s,t),$$

für die gilt: $h(0,t) = \gamma(t)$ für jedes $t \in [0,1]$, und $h(1,t) = p$ für jedes $t \in [0,1]$.

Die anschauliche Vorstellung ist, daß die Kurve $\Gamma \subset \Omega$ stetig auf einen Punkt p zusammengezogen wird, ohne dabei Ω zu verlasssen. Hohlkugeln im $\mathbb{R}^3$ sind einfach zusammenhängend, Kreisringe im $\mathbb{R}^2$ sind es nicht. Der Satz über die Wegunabhängigkeit von reellen Kurvenintegralen aus dem ersten Studienjahr gilt auch für einfach zusammenhängende Gebiete (wurde aber nur für sternförmige Gebiete bewiesen).

Wir variieren Satz 8.8 ein wenig:

Satz 1.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig, und Ω sei konvex. Dann sind äquivalent:*

1. *f hat eine in Ω holomorphe Stammfunktion F im Sinne von $F' = f$ überall in Ω,*
2. *für jede Schleife $\Gamma \subset \Omega$ gilt $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$,*
3. *für jedes Dreieck $\triangle \subset \Omega$ gilt $\int_\triangle f(z)\mathrm{d}z = 0$.*

Hierbei verstehen wir unter einem Dreieck immer nur den Kantenzug, niemals das Innere.

Beweis. Die Äquivalenz $1 \iff 2$ wurde im Satz 8.8 schon bewiesen.

Offenkundig folgt die dritte Aussage aus der zweiten.

Wir zeigen, daß auch die erste Aussage aus der dritten folgt (mit einem Beweis fast wie bei Satz 8.8). Sei dazu $z_* \in \Omega$ beliebig gewählt, und wir definieren

$$F(z) := \int_{S(z_* \to z)} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta,$$

wobei $S(z_* \to z)$ die gerichtete Verbindungsstrecke von z_* nach z bezeichnet. Diese verläuft in Ω wegen Konvexität. Aus der Aussage 3 folgt, daß

$$F(z) - F(z_0) = \int_{S(z_0 \to z)} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

Der Rest des Beweises verläuft wie bei Satz 8.8. $\square$

Wir haben also eine zusätzliche Äquivalenz bekommen, und wir bezahlen dafür mit der neuen Konvexitätsforderung an Ω.

Lemma 1.3 (Lemma von Goursat). *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ sei holomorph, und $\triangle \subset \Omega$ sei ein Dreieck, dessen Inneres* $\operatorname{int} \triangle$ *in Ω liegt.*

Dann ist

$$\int_\triangle f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Beweis. Wir zerteilen $\triangle$ (genauer: dessen Inneres) in vier kleinere Dreiecke $\triangle_1^1, \ldots, \triangle_1^4$, indem wir drei Verbindungsstrecken ziehen zwischen den drei Kantenmittelpunkten von $\triangle$. Jedes der neuen Dreiecke $\triangle_1^j$ statten wir mit demselben Umlaufsinn aus wie $\triangle$. Dann ist offenkundig

$$\int_{\triangle} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{4} \int_{\triangle_1^j} f(z)\mathrm{d}z,$$

und somit folgt

$$\left| \int_{\triangle} f(z)\mathrm{d}z \right| \leq \sum_{j=1}^{4} \left| \int_{\triangle_1^j} f(z)\mathrm{d}z \right| \leq 4 \max_j \left| \int_{\triangle_1^j} f(z)\mathrm{d}z \right|.$$

Dasjenige Teil-Dreieck, welches das Maximum verwirklicht, taufen wir $\triangle_1$.

Analog unterteilen wir $\triangle_1$ in vier Teil-Dreiecke, von denen wir wiederum eines auswählen, das $\triangle_2$ heißen möge, usw. Es entsteht eine Folge $(\triangle_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ von Teildreiecken, mit

$$\mathrm{laenge}(\triangle_n) = 2^{-1}\,\mathrm{laenge}(\triangle_{n-1}) = \cdots = 2^{-n}\,\mathrm{laenge}(\triangle).$$

Es gibt genau einen Punkt $z_0 \in \Omega$ mit $\{z_0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_+}(\triangle_n \cup \operatorname{int}\triangle_n)$, denn $\triangle \cup \operatorname{int}\triangle$ ist kompakt.

Weil f holomorph ist, haben wir die Weierstraß–Zerlegung

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + R(z, z_0), \qquad z \to z_0,$$

wobei für den Rest R gilt, daß

$$\lim_{z\to z_0} \frac{R(z, z_0)}{z - z_0} = 0.$$

Das heißt: für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ sodaß $|R(z, z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|$ falls $|z - z_0| < \delta$. Somit folgt

$$\left| \int_{\triangle} f(z)\mathrm{d}z \right| \leq 4^n \left| \int_{\triangle_n} f(z_0)\mathrm{d}z \right| + 4^n \left| \int_{\triangle_n} f'(z_0)(z - z_0)\mathrm{d}z \right| + 4^n \left| \int_{\triangle_n} R(z, z_0)\mathrm{d}z \right|,$$

und die ersten beiden Integrale auf der rechten Seite sind Null, wegen Satz 1.2. Wir können also weiter abschätzen (wenn $\mathrm{laenge}(\triangle_n) < \delta$)

$$4^n \left| \int_{\triangle_n} R(z, z_0)\mathrm{d}z \right| \leq 4^n\,\mathrm{laenge}(\triangle_n) \cdot \varepsilon\,\mathrm{laenge}(\triangle_n) = 4^n \cdot 2^{-n}\,\mathrm{laenge}(\triangle) \cdot \varepsilon 2^{-n}\,\mathrm{laenge}(\triangle) = \varepsilon(\mathrm{laenge}(\triangle))^2,$$

wobei wir hier $|z - z_0| \leq \mathrm{laenge}(\triangle_n)$ genutzt haben, für $z \in \triangle_n$.

Diese Rechnung können wir für jedes positive ε wiederholen, was den Beweis vollendet. □

Folgerung 1.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $p \in \Omega$, die Funktion f sei holomorph auf $\Omega \setminus \{p\}$, und f sei stetig in ganz Ω. Sei $\triangle \subset \Omega$ ein Dreieck mit $\operatorname{int}\triangle \subset \Omega$.*

Dann gilt die Behauptung des Lemmas von Goursat.

Beweis. Wir unterscheiden einige Fälle.

Fall 1: $p \notin \triangle \cup \operatorname{int}\triangle$

Dann verwenden wir den obigen Beweis des Lemmas von Goursat.

Fall 2. p ist auf einer Ecke von $\triangle$

Dann zerlegen wir $\triangle$ wie gehabt in vier Teildreiecke. Auf dreien von diesen können wir den Fall 1 anwenden, und das vierte zerlegen wir erneut. Wir erhalten dann eine Folge von Dreiecken $\triangle$, $\triangle_1$, $\triangle_2, \ldots$, die alle die Ecke p gemeinsam haben, und es ist

$$\int_{\triangle} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\triangle_n} f(z)\mathrm{d}z$$

für jedes n. Es ist aber f beschränkt in einer Umgebung von p, und $\triangle_n$ wird immer kürzer. Also sind alle diese Integrale gleich Null.

Fall 3: p liegt auf einer Kante von $\triangle$

Dann verbinden wir p mit der gegenüberliegenden Ecke und wenden Fall 2 an.

Fall 4: p liegt im Inneren von $\triangle$

Man wende Fall 2 an.

Damit ist die Folgerung bewiesen. □

Wir können auch annehmen, daß es noch weitere solche Ausnahmepunkte gibt, solange es endlich viele bleiben.

Jetzt können wir endlich eine mathematische Version des Cauchy–Integralsatzes aufstellen:

Theorem 1.5 (Integralsatz von Cauchy). *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ konvex, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ sei stetig, und f sei überall in Ω holomorph mit Ausnahme endlich vieler Punkte.*

Für jede Schleife $\Gamma \subset \Omega$ gilt dann

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Beweis. Die Folgerung aus dem Lemma von Goursat liefert uns die Behauptung, falls Γ ein Dreieck wäre. Anschließend benutzen wir die Folgerung $3 \Longrightarrow 2$ von Satz 1.2. □

Das ist die mathematisch sauber bewiesene Variante von Satz 8.14 aus dem Physiker–Skript.

Der Integralsatz von Cauchy gilt auch noch, wenn man von f nicht mehr fordert, daß es überall in Ω stetig ist (also auch in den Ausnahmepunkten), sondern stattdessen die Beschränktheit von f in Umgebungen dieser Ausnahmepunkte verlangt. Der Beweis dazu wird allerdings etwas technischer (oder später ganz einfach, wenn wir mehr Werkzeuge haben werden).

2 Zu Kapitel 9

Es ist Lemma 9.5 gerade die **Definition** dafür, daß Ω zusammenhängend ist. Im Physikkurs war der Zusammenhangsbegriff gerade als Wegzusammenhang definiert wurden (was im $\mathbb{R}^n$ äquivalent zur Definition gemäß Lemma 9.5 ist).

Theorem 2.1 (Allgemeine Version des Residuensatzes). *Se $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $\Gamma \subset \Omega$ eine Schleife, und sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ meromorph mit einer endlichen Polstellenmenge $P^{(f)}$. Dann ist*

$$\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{p \in P^{(f)}} \operatorname*{Ind}_\Gamma(p) \cdot \operatorname*{res}_p(f).$$

Beweis. Sei $P^{(f)} = \{z_1, \dots, z_N\}$ die endliche Polstellenmenge von f. Bei jedem Pol $z_j \in P^{(f)}$ (mit Ordnung m_j) haben wir eine Laurentreihenentwicklung, und insbesondere ist in einer jeweiligen Umgebung von z_j die Funktion

$$z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{j,k}}{(z - z_j)^k}$$

holomorph (mit passenden Koeffizienten $c_{j,k}$). Dann ist auch die Funktion

$$z \mapsto f(z) - \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{j,k}}{(z - z_j)^k}$$

in ganz Ω holomorph, sodaß der Cauchy–Integralsatz uns zu

$$\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \oint_\Gamma \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{j,k}}{(z - z_j)^k}\mathrm{d}z$$

bringt. Wir wählen uns jetzt eine Funktion $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$, die überall den Wert Eins hat. Dann ist

$$\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{m_j} c_{j,k} \oint_\Gamma \frac{g(z)}{(z-z_j)^k}\mathrm{d}z.$$

Wegen der Cauchy–Integralformel in ihrer allgemeinsten Form haben wir

$$\begin{aligned}\operatorname*{Ind}_\Gamma(z_j)g(z_j) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\Gamma \frac{g(z)}{z-z_j}\mathrm{d}z,\\ \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\Big(\operatorname*{Ind}_\Gamma(z)g(z)\Big)\Big|_{z=z_j} &= \frac{m!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\Gamma \frac{g(z)}{(z-z_j)^{m+1}}\mathrm{d}z \qquad (m\ge 0),\end{aligned}$$

und somit ist (weil Ind lokal konstant ist)

$$\begin{aligned}\operatorname*{Ind}_\Gamma(z_j) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\Gamma \frac{g(z)}{z-z_j}\mathrm{d}z,\\ 0 &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\Gamma \frac{g(z)}{(z-z_j)^{m+1}}\mathrm{d}z \qquad (m\ge 1),\end{aligned}$$

sodaß wir nach Einsetzen also

$$\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{N} c_{j,1}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot \operatorname*{Ind}_\Gamma(z_j)$$

bekommen. Es ist aber $c_{j,1} = \operatorname{res}_{z_j}(f)$, was den Beweis vollendet. □

3 Zu Kapitel 10

Das folgende Lemma tauchte implizit im Beweis von Lemma 10.4 auf.

Lemma 3.1. *Seien $a_n, \dots, a_0\colon [-1,1] \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen, und seien $z_1(t), \dots, z_n(t)$ die Nullstellen des Polynoms*

$$P(t,z) := \sum_{j=0}^{n} a_j(t)z^j, \qquad n \ge 1.$$

Dann gibt es eine Numerierung der $z_j(t)$, sodaß die Funktionen z_j auf dem Intervall $[-1,1]$ stetig sind.

Bemerkung 3.2. *Wenn $z_1(0)$ eine einfache Nullstelle ist, dann gilt*

$$P(0,z_1(0)) = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial z}(0,z_1(0)) \neq 0,$$

und die Behauptung kann aus dem Satz über implizite Funktionen gefolgert werden (freiwillige Übungsaufgabe).

Beweis. Sei $z_1(0)$ eine Nullstelle der Vielfachheit $m \ge 1$.

Wir zeigen: es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$, sodaß für jedes $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ ein $\delta(\varepsilon > 0)$ existiert, sodaß das Polynom $z \mapsto P(t,z)$ im Ball $B(z_1(0),\varepsilon)$ genau m Nullstellen hat.

(Wie sich aus dieser Hilfsaussage dann die gewünschte Numerierung der Nullstellen ergibt, sei eine f.Ü.).

Zunächst ist $z_1(0)$ eine isolierte Nullstelle von $P(0,\cdot)$. Es existiert also ein ε_0, sodaß das Polynom $P(0,\cdot)$ im Ball $B(z_1(0),\varepsilon_0)$ keine weitere Nullstelle hat. Sei $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ beliebig. Wir setzen $\Gamma_\varepsilon := \partial B(z_1(0),\varepsilon)$, und wir definieren (für t nahe bei 0)

$$N(t) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{P_z(t,\zeta)}{P(t,\zeta)}\mathrm{d}\zeta.$$

Zähler und Nenner sind stetige Funktionen auf $[-1,1]\times\mathbb{C}$. Der Nenner ist ungleich Null auf der kompakten Menge $\{0\}\times\Gamma_\varepsilon$, also gibt es ein $\delta(\varepsilon) > 0$, sodaß der Nenner auch ungleich Null ist auf der Menge $[-\delta(\varepsilon),\delta(\varepsilon)]\times\Gamma_\varepsilon$. Also ist der Integrand eine stetige Funktion auf $[-\delta(\varepsilon),\delta(\varepsilon)]\times\Gamma_\varepsilon$, und folglich ist N stetig auf dem Intervall $[-\delta(\varepsilon),\delta(\varepsilon)]$. Andererseits kann N nur ganze Zahlen als Wert annehmen, und folglich ist N auf dem Intervall $[-\delta(\varepsilon),\delta(\varepsilon)]$ konstant. Das wollten wir zeigen. □

Als Nächstes schauen wir uns eine Idee an, von der man meint, daß man damit den Satz von Rouché widerlegen könnte. Die Idee dahinter ist die folgende: die entscheidende Ungleichung $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ kann so interpretiert werden: die Funktion f wird auf Γ durch eine Funktion g angenähert, und der Fehler ist überall kleiner als 100%.

Seien nun zwei Funktionen f und h gegeben, die deutlich voneinander abweichen, und die insbesondere auch eine unterschiedliche Anzahl von Nullstellen haben. Dann sollte man meinen, daß es eine Funktion g geben könnte, sodaß $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ und $|g(z) - h(z)| < |g(z)|$ überall auf Γ gelten. Wir wenden den Satz von Rouché zweimal an und finden somit $N(f) = N(g)$ und $N(g) = N(h)$, also $N(f) = N(h)$; was im Widerspruch zur Annahme steht, daß f und h deutlich voneinander verschieden sind. Alternativ könnte man auch „mehrere Funktionen $g_1, \ldots, g_K$ dazwischenschalten".

Wir überlegen, warum ein solches Gegenbeispiel nicht konstruiert werden kann. Damit wir etwas Konkretes vor Augen haben, sei Γ der Einheitskreis, und $f = f(z) = z$ sowie $h = h(z) = z^2$. Es hat f genau eine Nullstelle in G, und h hat genau zwei Nullstellen in G. Warum kann es keine holomorphen Funktionen g_1, g_2, g_3 geben mit

$$|f(z)-g_1(z)| < |f(z)|, \quad |g_1(z)-g_2(z)| < |g_1(z)|, \quad |g_2(z)-g_3(z)| < |g_2(z)|, \quad |g_3(z)-h(z)| < |g_3(z)| \quad ?$$

Wenn wir z einschränken z.B. auf eine Umgebung von i, also nur $z \in \Gamma$ betrachten mit z.B. $\frac{3}{8}\pi < \arg z < \frac{5}{8}\pi$, dann findet man in dieser Umgebung sicherlich solche Funktionen g_1, g_2, g_3. Aber global auf ganz Γ eben nicht.

Um den Grund einzusehen, betrachten wir $f(z)$, $h(z)$ und $g_j(z)$ als Vektoren des $\mathbb{R}^2$, die wir an den Punkt $z \in \Gamma$ anheften. Und wir denken darüber nach, wie diese Vektoren sich bewegen, wenn z einmal die Kreislinie Γ umläuft.

In Assoziation zu Analoguhren sprechen wir ab jetzt von *Zeigern* anstatt *Vektoren*[1].

Bei der Funktion $f = f(z) = z$ weist der Zeiger stets aus dem Kreis hinaus, sodaß der f–Zeiger bei einem Umlauf von $z = 1$ bis $z = 1$ sich genau einmal im Gegenuhrzeigersinn gedreht hat.

Bei der Funktion $h = h(z) = z^2$ weist der Zeiger in unterschiedliche Richtungen: bei $z = 1$ aus dem Kreis hinaus, bei $z = \mathrm{i}$ tangential vorwärts, bei $z = -1$ in den Kreis hinein, bei $z = -\mathrm{i}$ tangential rückwärts, und bei $z = 1$ wieder aus dem Kreis hinaus. Der h–Zeiger hat sich also zweimal im Gegenuhrzeigersinn gedreht. Wir reden anschaulicherweise von der *Umlaufzahl eines Zeigers*. (Ein interessantes Ergebnis der nichtlinearen Funktionalanalysis ist es, daß man aus dieser *Umlaufzahl* Rückschlüsse zieht auf die Anzahl der Nullstellen im Innengebiet.)

Seien nun p und q zwei holomorphe Funktionen, für die auf Γ überall $|p(z) - q(z)| < |p(z)|$ gilt. Wir interpretieren, wie vorhin, q als „Näherung" von p. Was bedeutet jetzt diese Ungleichung für die Funktionen p und q ?

Zunächst natürlich $q(z) \neq 0$ überall auf Γ, also ist q nirgendwo der „Nullzeiger". Wir nehmen uns ein $z \in \Gamma$ her, und den dort gelegenen geometrischen Punkt nennen wir A. An $z = A$ heften wir den Zeiger $q(z)$ an und bekommen einen geometrischen Punkt B. Und an $z = A$ heften wir auch den Zeiger $p(z)$ an, was uns einen geometrischen Punkt C verschafft. Wir bekommen ein geometrisches Dreieck ABC, und laut Voraussetzung ist die Kante AC länger als die Kante BC, also ist der Innenwinkel bei B größer als der Innenwinkel bei A. Da alle drei Innenwinkel im Dreieck sich zu π aufaddieren, ist insbesondere der Innenwinkel im Dreieck ABC beim Punkt A kleiner als $\pi/2$. Dies bedeutet: der Zeiger $q(z)$ geht gegenüber dem Zeiger $p(z)$ um höchstens $\pi/2$ vor, oder um höchstens $\pi/2$ nach.

Wir können dies auch so interpretieren, daß der Zeiger $p(z)$ den Zeiger $q(z)$ „mitschleift". Daraus folgt dann auch: wenn der Zeiger p (bei einem Umlauf von z um den Kreis) eine gewisse Umlaufzahl erzielt, dann erzielt der Zeiger q **dieselbe** Umlaufzahl.

Wenn also die obige Ungleichungssammlung gälte, dann

- hätten f und g_1 die gleiche Zeiger–Umlaufzahl,
- hätten g_1 und g_2 die gleiche Zeiger–Umlaufzahl,
- hätten g_2 und g_3 die gleiche Zeiger–Umlaufzahl,
- hätten g_3 und h die gleiche Zeiger–Umlaufzahl,

[1] Das Folgende ist natürlich kein vollwertiger Beweis, sondern eher die Skizze eines Gedankengangs. Aber zu einem exakten Beweis fehlt gar nicht mehr viel !

aber das kann nicht sein. Denn f hat die Zeiger–Umlaufzahl Eins, und h hat die Zeiger–Umlaufzahl Zwei.

Wenn man diese Gedanken in eine (noch zu findende) äquivalente Form bringt und anschließend auf Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ verallgemeinert (wobei jetzt Ω ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$ sein soll), dann kommt man zum Begriff des *Abbildungsgrades der Funktion f*. Dieser Begriff wird in der *nichtlinearen Funktionalanalysis* ausgiebig studiert.