Kapitel 4

Abbildungsgrade und SCHAUDERscher Fixpunktsatz

4.1 Motivation

4.1.1 Was sind Abbildungsgrade ?

Sei $G \subset \mathbb{R}^2_x$ ein beschränktes Gebiet, einfach zusammenhängend, mit glattem Rand ∂G, der also eine Kurve ist. Sei $f\colon \mathbb{R}^2_x \to \mathbb{R}^2_y$ eine Abbildung, genügend oft stetig differenzierbar. Dann ist $f(G)$ eine beschränkte Menge in $\mathbb{R}^2_y$, und $f(\partial G)$ ist eine glatte geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2_y$.

Wir können jetzt die Frage stellen, wie oft ein Punkt $y \in \mathbb{R}^2$ von $f(\partial G)$ „umlaufen“ wird. Die Definition einer Umlaufzahl ist geometrisch irgendwie klar, es sei denn, daß y auf der Kurve $f(\partial G)$ liegt (dann sei die Umlaufzahl undefiniert).

Wenn man nun irgendwie zeigen kann, daß für jeden Punkt $y \in \mathbb{R}^2$ die Umlaufzahl entweder 0 oder 1 oder undefiniert ist, dann gibt die geometrische Anschauung Anlaß zur Vermutung, daß f injektiv ist. Wir hätten also eine Aussage über die Eindeutigkeit von Lösungen x der Gleichung $f(x) = y$. Andererseits muß man im Hinterkopf behalten, daß ein Punkt einmal linksherum umlaufen werden kann und einmal rechtsherum, sodaß sich dann die Umlaufzahl 0 ergeben könnte.

Wenn man den Begriff der Umlaufzahl verallgemeinert für Abbildungen zwischen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^n$, oder für Abbildungen eines Banachraumes B in sich, dann kommt man mehr oder weniger zum Begriff des *Abbildungsgrades*.

4.1.2 Was ist der SCHAUDERsche Fixpunktsatz ?

Bekannt ist der BANACH[1]sche Fixpunktsatz (1920): eine kontrahierende Abbildung einer abgeschlossenen Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes in sich hat in dieser Teilmengen genau einen Fixpunkt, und dieser Fixpunkt kann gefunden werden als Grenzwert einer Folge, bei der sich ein Folgenglied durch Anwenden der Abbildung auf das Vorgängerglied ergibt. Wir haben sogar eine Fehlerschätzung, wenn wir das Iterationsverfahren irgendwo abbrechen.

Unbewußt bekannt ist der folgende *Fixpunktsatz ohne Namen*: eine stetige Abbildung eines kompakten Intervalls in sich hat mindestens einen Fixpunkt in diesem Intervall.

Ein Beweis ergibt sich z.B. durch eine Skizze. Es kann mehrere Fixpunkte geben, und wir haben auch kein Rezept, wenigstens einen Fixpunkt zu finden.

Eine Verallgemeinerung ist der *Fixpunktsatz von* BROUWER[2]($\approx$ 1910): eine stetige Abbildung einer kompakten und konvexen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ in sich hat mindestens einen Fixpunkt in dieser Teilmenge.

[1] Stefan Banach, 1892–1945
[2] Luitzen Egbertus Jan Brouwer, 1881–1966

Der *Fixpunktsatz von* Schauder[3] (1930) verallgemeinert dies für beliebige Banachräume anstatt des $\mathbb{R}^n$, und man erhält: eine kompakte Abbildung einer beschränkten, abgeschlossenen und konvexen Menge in sich hat einen Fixpunkt. Man beachte dabei, daß beschränkte, abgeschlossene Mengen im $\mathbb{R}^n$ genau die kompakten Mengen sind. Der Begriff der kompakten Abbildung wird noch definiert.

4.2 Einige Begriffe

Definition 4.2.1. *Eine Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen heißt* homöomorph*, wenn sie bijektiv und stetig ist, mit stetiger Umkehrabbildung.*

Einen Satz über inverse Funktionen gibt es auch für Abbildungen zwischen Banachräumen:

Satz 4.2.2 (Homöomorphiesatz). *Sei X ein Banachraum, $U = U(x_0) \subseteq X$ eine Umgebung eines Punktes $x_0 \in X$, und sei $f\colon U \to X$ Fréchet[4]–differenzierbar, und diese Ableitung sei stetig auf U.*

Sei $f'(x_0)$ ein (linearer) Homöomorphismus.

Dann existiert eine Umgebung $U_0 \subset U$ derart, daß $f_{\big|U_0}$ ein Homöomorphismus von U_0 auf die Umgebung $f(U_0)$ des Punktes $y_0 = f(x_0)$ ist.

Beweis. Im Prinzip wie beim Satz über inverse Funktionen zwischen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^n$. □

Definition 4.2.3. *Eine Teilmenge Ω eines metrischen Raumes heißt* wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten x_0, $x_1 \in \Omega$ eine stetige Abbildung $f\colon [0,1] \to \Omega$ gibt mit $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$.*

4.3 Der Abbildungsgrad für „schöne“ Funktionen im $\mathbb{R}^n$

Der Raum $\mathbb{R}^n$ wird ausgestattet mit der üblichen pythagoräischen[5] Norm.

Eine offene Kreisscheibe um $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit Radius $r > 0$ wird bezeichnet mit $K_r(x_0)$.

Der Abstand eines Punktes x zu einer nichtleeren abgeschlossenen Menge A sei $d(x, A)$.

Für offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $\delta > 0$ sei $\Omega_\delta = \{x \in \Omega\colon d(x, \partial\Omega) \geq \delta\}$. Wir nehmen an, daß δ so klein ist, daß $\Omega_\delta \neq \emptyset$.

Für offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir:

$$
\begin{aligned}
&C^k(\Omega) = \{f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n, \quad \partial_x^\alpha f \text{ stetig in } \Omega, \quad \forall |\alpha| \leq k\},\\
&\overline{C}^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),\\
&\|f\|_0 = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|,\\
&C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(\Omega),\\
&f^{-1}(A) = \{x \in \Omega\colon f(x) \in A\}, \qquad A \subset \mathbb{R}^n_y \quad \text{(Urbildmenge)},\\
&f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\}), \qquad y \in \mathbb{R}^n_y,\\
&J_f(x) = \det f'(x) \qquad \text{(Funktionaldeterminante von } f\text{)}\\
&N_f(\Omega) = \{x \in \Omega\colon J_f(x) = 0\} \qquad \text{(Menge der kritischen Punkte von } f\text{).}
\end{aligned}
$$

Die Menge $f(N_f(\Omega)) \subset \mathbb{R}^n_y$ heißt *Menge der kritischen Werte*.

Die Menge $\mathbb{R}^n_y \setminus (f(\partial\Omega) \cup f(N_f(\Omega)))$ heißt *Menge der regulären Werte*. Man beachte, daß ein Punkt des $\mathbb{R}^n_y$, der nie als Funktionswert angenommen wird, in diesem Sinne ein regulärer Wert ist.

Kritische Werte sind selten:

Lemma 4.3.1 (Sard[6]sches Lemma (1942)). *Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega)$, dann ist $f(N_f(\Omega))$*

[3] Juliusz Paweł Schauder, 1899–1943
[4] Maurice René Fréchet, 1878–1973
[5] Pythagoras von Samos, ≈ 580–≈ 500 v.Ch.
[6] Arthur Sard

eine Lebesgue–Nullmenge.

Beweis. Verschoben in den Anhang. $\square$

Die Urbildmenge von regulären Werten ist recht übersichtlich:

Lemma 4.3.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, und sei $f \in \overline{C}^1(\Omega)$, sowie $y_0 \notin f(\partial\Omega) \cup f(N_f(\Omega))$. Dann besteht $f^{-1}(y_0)$ aus höchstens endlich vielen Punkten.*

Ist nun also $f^{-1}(y_0) = \{x_1, \ldots, x_m\}$, so existieren $r > 0$ und Umgebungen $U(x_i)$ mit

$$\overline{U(x_i)} \subset \Omega, \qquad U(x_i) \cap U(x_j) = \emptyset \quad (i \neq j),$$

und $\operatorname{sign} J_f(x)$ ist auf jeder Umgebung $U(x_i)$ jeweils konstant, $f\big|_{U(x_i)}$ ist ein Homöomorphismus von $U(x_i)$ nach $K_r(y_0)$.

Beweis. Angenommen, $f^{-1}(y_0)$ wäre unendlich. Dann hat $f^{-1}(y_0)$ einen Häufungspunkt $x_0 \in \overline{\Omega}$.
Weil $f \in C(\overline{\Omega})$, gilt $f(x_0) = y_0$. Weil $y_0 \notin f(\partial\Omega)$, gilt sogar $x_0 \in \Omega$.
Nun ist $J_f(x_0) \neq 0$, und somit ist $f'(x_0)$ homöomorph. Nach dem Homöomorphiesatz existiert dann eine Umgebung $U = U(x_0)$ von x_0, sodaß

$$f(x) \neq y_0, \qquad x \in U \setminus \{x_0\}$$

gilt. Also kann x_0 kein Häufungspunkt sein. Widerspruch. Dann ist $f^{-1}(y_0)$ endlich.
Der Rest folgt aus dem Homöomorphiesatz. $\square$

Vereinbarung: Ab jetzt sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ immer offen und beschränkt.

Nun können wir einen ersten Abbildungsgrad definieren:

Definition 4.3.3 (Abbildungsgrad für stetig differenzierbare Abbildungen). *Sei $f \in \overline{C}^1(\Omega)$, $y \notin f(\partial\Omega)$, sowie $y \notin f(N_f(\Omega))$.*
Dann setzen wir

$$d(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} J_f(x).$$

Falls $f^{-1}(y) = \emptyset$, lesen wir dies als $d(f, \Omega, y) = 0$.
Diese Zahl nennen wir Abbildungsgrad von f auf Ω bzgl. y.

Man beachte, daß nur endlich viele x in die Summe eingehen.

Beispiel: *Sei $\Omega = (-100, 100) \subset \mathbb{R}^1$, und sei $f = f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. Dann ist $d(f, \Omega, 0) = 1$.*

Beispiel: *Sei $\Omega = (-100, 100) \subset \mathbb{R}^1$, und sei $f = f(x) = x^2 - 4$. Dann ist $d(f, \Omega, 0) = 0$.*

Beispiel: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei invertierbar, und sei $f(x) = Ax$. Dann ist $d(f, \Omega, y) = \pm 1$ für $y \in A(\Omega)$ und $= 0$ sonst. Falls A singulär sein sollte, ist $d(f, \Omega, y)$ teilweise noch nicht definiert, wird sich aber später als 0 ergeben.*

Um $d(f, \Omega, y)$ zu berechnen, müßte man anscheinend $f^{-1}(y)$ bestimmen, also die Gleichung $f(x) = y$ lösen, was man eigentlich vermeiden wollte. Es gibt aber noch einen anderen Weg:

Lemma 4.3.4. *Sei $f \in \overline{C}^1(\Omega)$, $y \notin f((\partial\Omega) \cup N_f)$.*
Sei $\{\Phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ eine Schar von stetigen Funktionen $\Phi_\varepsilon \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp} \Phi_\varepsilon \subset K_\varepsilon(0)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\varepsilon \, \mathrm{d}x = 1$ für jedes $\varepsilon > 0$.
Dann gibt es ein $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f, y) > 0$ sodaß für jedes $\varepsilon < \varepsilon_0$ gilt:

$$d(f, \Omega, y) = \int_{x\in\Omega} \Phi_\varepsilon(f(x) - y) J_f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Beweis. Wenn $f^{-1}(y) = \emptyset$, dann ist der Integrand immer null für kleine ε, und der Beweis ist (fast) klar.

Sei nun $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Es gibt Umgebungen $U(x_i)$ und ein $r > 0$, sodaß f ein Homöomorphismus von $U(x_i)$ nach $K_r(y)$ ist, und $\operatorname{sign} J_f(x) = \operatorname{sign} J_f(x_i)$ ist für $x \in U(x_i)$. Nun ist $\Omega_0 = \overline{\Omega} \setminus \cup_{i=1}^m U(x_i)$ kompakt, also hat dort $\|f(x) - y\|_0$ ein (positives) Minimum.

Für winzige ε ist dann

$$\begin{aligned}\int_{x\in\Omega} \Phi_\varepsilon(f(x) - y) J_f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^m \int_{x\in U(x_i)} \Phi_\varepsilon(f(x) - y) J_f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^m \operatorname{sign} J_f(x_i) \int_{x\in U(x_i)} \Phi_\varepsilon(f(x) - y) |J_f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^m \operatorname{sign} J_f(x_i) \int_{\eta\in K_r(0)} \Phi_\varepsilon(\eta)\,\mathrm{d}\eta = \sum_{i=1}^m \operatorname{sign} J_f(x_i),\end{aligned}$$

wegen des Transformationssatzes für Riemann–Integrale. □

Wir haben jetzt einen einigermaßen brauchbaren Weg, um $d(f, \Omega, y)$ zu bestimmen. Allerdings sind die Bedingungen an f und y uns noch zu streng. Unser Ziel ist $f \in C(\overline{\Omega})$ und $y \notin f(\partial\Omega)$. Die letztere Voraussetzung werden wir nie los, wie das einführende Beispiel mit den Umlaufzahlen gezeigt hat.

Zunächst stellen wir fest, daß der Abbildungsgrad bzgl. y „lokal konstant" ist:

Lemma 4.3.5. *Sei $f \in \overline{C}^2(\Omega)$, $y_0 \notin f(\partial\Omega)$. Wir setzen $\alpha := d(y_0, f(\partial\Omega))$. Dann ist*

$$d(f, \Omega, y) = \text{const.}$$

für alle $y \in K_\alpha(y_0) \setminus f(N_f)$.

Beweis. Im Anhang. □

Damit können wir jetzt den Abbildungsgrad für allgemeinere y definieren. Als Preis dafür haben wir verschärfte Glattheitsforderungen an f, die wir im nächsten Abschnitt loswerden:

Definition 4.3.6. *Sei $f \in \overline{C}^2(\Omega)$ und $y \notin f(\partial\Omega)$.*

Für $y \notin f(N_f)$ definieren wir $d(f, \Omega, y)$ wie zuvor.

Für $y \in f(N_f)$ setzen wir $d(f, \Omega, y) := d(f, \Omega, y_0)$, wobei y_0 ein beliebiger Punkt aus $K_\alpha(y) \setminus f(N_f)$ ist, mit $\alpha = d(y, f(\partial\Omega))$.

Wir stellen fest, daß die Funktion $y \mapsto d(f, \Omega, y)$ stetig ist in $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Insbesondere ist diese Funktion auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ konstant.

4.4 Der Abbildungsgrad für stetige Funktionen im $\mathbb{R}^n$

Zunächst stellen wir fest, daß sich der Abbildungsgrad nicht ändert, wenn man die Funktion ein wenig abwandelt:

Lemma 4.4.1. *Seien $f, g \in \overline{C}^2(\Omega)$ und $y \notin f(\partial\Omega)$. Dann gibt es ein $\delta = \delta(f, g, y) > 0$ sodaß für jedes t mit $|t| < \delta$ gilt:*

$$d(f + tg, \Omega, y) = d(f, \Omega, y).$$

Beweis. Im Anhang. □

Wir merken uns die **Schreibweise** $f_t(x) = f(x) + tg(x)$.

Wir nähern uns der Definition des Abbildungsgrades für allgemeine stetige Funktionen f:

Sei also $f \in C(\overline{\Omega})$ und $y \notin f(\partial\Omega)$. Wir setzen $\alpha = d(y, f(\partial\Omega))$. Für zwei Funktionen g_0, $g_1 \in \overline{C}^2(\Omega)$ mit $\|g_i - f\|_0 < \alpha$ ist dann $d(y, g_i(\partial\Omega)) > 0$. Wir betrachten jetzt

$$h(t, x) = g_0(x) + t(g_1(x) - g_0(x)), \qquad (t, x) \in [0, 1] \times \overline{\Omega}.$$

Dann ist $h(t, \cdot) \in \overline{C}^2(\Omega)$ und $\|h(t, \cdot) - f(\cdot)\|_0 < \alpha$ für alle $t \in [0, 1]$, also $y \notin h(t, \partial\Omega)$ für sämtliche t.

Wir definieren $\Phi(t) = d(h(t, \cdot), \Omega, y)$ als Funktion von $[0, 1]$ nach $\mathbb{Z}$. Nach Lemma 4.4.1 finden wir für jedes $t_0 \in [0, 1]$ ein $\delta = \delta(t_0) > 0$ sodaß $\Phi(t) = \Phi(t_0)$ für alle $t \in [0, 1]$ mit $|t - t_0| < \delta$. Also ist Φ lokal konstant, und wir erhalten zwangsläufig $\Phi(1) = \Phi(0)$, also $d(g_1, \Omega, y) = d(g_0, \Omega, y)$.

Das motiviert folgende Definition:

Definition 4.4.2 (Abbildungsgrad für stetige Funktionen). *Sei $f \in C(\overline{\Omega})$ und $y \notin f(\partial\Omega)$. Setze $\alpha = d(y, f(\partial\Omega)) > 0$. Dann setzen wir $d(f, \Omega, y) := d(g, \Omega, y)$, wobei $g \in \overline{C}^2(\Omega) \cap K_\alpha(f)$ ist, und der Abbildungsgrad $d(g, \Omega, y)$ wurde durch Definition 4.3.6 erklärt.*

Satz 4.4.3 (Eigenschaften des Abbildungsgrades). *Es gilt folgendes:*

1. *Für die identische Abbildung auf $\mathbb{R}^n$ ist*

$$d(I, \Omega, y) = \begin{cases} 1 & : y \in \Omega, \\ 0 & : y \notin \Omega. \end{cases}$$

2. *Aus $d(f, \Omega, y) \neq 0$ folgt $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ (Existenz einer y–Stelle).*
3. *Ist $h\colon [0, 1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ stetig und $y \notin h(t, \partial\Omega)$ für jedes $t \in [0, 1]$, dann ist $d(h(t, \cdot), \Omega, y)$ auf $[0, 1]$ konstant (Prinzip der Homotopie).*
4. *Falls $f, g \in C(\overline{\Omega})$ und $g_{|\partial\Omega} = f_{|\partial\Omega}$, dann ist $d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y)$.*

Beim Homotopieprinzip stelle man sich vor, daß $h(0, \cdot)$ eine einfache Funktion ist, deren Abbildungsgrad einfach bestimmbar ist; und $h(1, \cdot)$ ist eine kompliziertere Funktion, an deren Abbildungsgrad wir in Wirklichkeit interessiert ist.

Die letzte Eigenschaft besagt, daß der Abbildungsgrad nur vom Randverhalten der Funktion abhängt.

Beweisskizze. Teil 1 ist im Prinzip offensichtlich.

Teil 2 ist klar für Abbildungsgrade im Sinne von Definition 4.3.3. Für Abbildungsgrade im Sinne der Definitionen 4.3.6 und 4.4.2 folge man den Beweisen von Lemma 4.3.5 und 4.4.1.

Der Beweis von Teil 3 folgt der Motivation vor Definition 4.4.2.

Und Teil 4 folgt aus Teil 3 mit $h(t, x) = tf(x) + (1 - t)g(x)$. Beachte $f(\partial\Omega) = g(\partial\Omega) = h(t, \partial\Omega)$ für jedes $t \in [0, 1]$. $\square$

Beispiel: *Das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} 2x + y + \sin(x + y) &= 0, \\ x - 2y + \cos(x + y) &= 0 \end{aligned}$$

hat eine Lösung in $K_r(0)$ mit $r > 1/\sqrt{5}$. Denn es seien $f(x, y) = (2x + y, x - 2y)^\top$ und $g(x, y) = (\sin(x + y), \cos(x + y))^\top$. Dann ist $\|f(x, y)\| = \sqrt{5}\,\|(x, y)\|$ und $\|g(x, y)\| = 1$. Für $\|(x, y)\| > 1/\sqrt{5}$ gilt $\|f(x, y)\| > \|g(x, y)\|$. Also ist f der Hauptteil von $f + g$ auf ∂K. Dann ist mit dem Homotopieprinzip

$$d(f + g, K_r(0), 0) = d(f, K_r(0), 0) = \operatorname{sign}\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Wir vergleichen das Homotopieprinzip mit dem Satz von Rouché aus der Funktionentheorie:

Satz 4.4.4 (Satz (1862) von ROUCHÉ[7]). *Seien f und g in $\overline{\Omega}$ analytisch, $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und auf dem Rand $\partial\Omega$ gelte immer $|g(z)| < |f(z)|$. Dann haben f und $f+g$ die gleiche Anzahl von Nullstellen in Ω.*

Beweis. Wir setzen $f_t(z) = f(z) + tg(z)$. Für $t \in [0,1]$ und $z \in \partial\Omega$ ist dann $f_t(z) \neq 0$, und somit wird die Anzahl der Nullstellen von f_t in Ω gegeben durch

$$N(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial\Omega} \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}\,\mathrm{d}z.$$

Es ist N eine stetige Funktion bzgl $t \in [0,1]$, wie man z.B. mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue sieht. Außerdem kann N nur Werte in den natürlichen Zahlen annehmen. Daraus folgt $N(1) = N(0)$. □

4.5 Der Fixpunktsatz von BROUWER

Wir kommen zu einem Highlight:

Satz 4.5.1. *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex. Sei $f \in C(K)$ eine stetige Funktion, die K in sich abbildet. Dann hat f mindestens einen Fixpunkt in K.*

Die Behauptung gilt auch noch, wenn K zu einer kompakten und konvexen Menge homöomorph ist.

Beweis.

Fall 1: Sei $K = \overline{K_r(0)}$.

Es kann angenommen werden, daß $x \neq f(x)$ ist für $x \in \partial K$. Wir betrachten die Funktion $h = h(t,x) = x - tf(x)\colon [0,1] \times K \to \mathbb{R}^n$.

Für $0 \leq t < 1$ und $x \in \partial K$ ist $\|x - tf(x)\| \geq \|x\| - t\,\|f(x)\| \geq r - tr > 0$.

Und für $t = 1$ und $x \in \partial K$ ist $\|x - tf(x)\| = \|x - f(x)\| > 0$ aufgrund der Annahme.

Demnach ist $0 \notin h(t, \partial K)$ für alle $t \in [0,1]$. Offensichtlich ist h auch stetig.

Wegen des Homotopieprinzips haben wir also

$$d(I - f, K_r(0), 0) = d(I, K_r(0), 0) = 1.$$

Also hat $h(1,\cdot) = I - f$ eine Nullstelle, bzw. f hat einen Fixpunkt.

Fall 2: Sei K kompakt und konvex.

Sei r so groß, daß $K \subset K_r(0)$ ist. Wegen Lemma A.2.2 existiert eine Fortsetzung $\tilde{f}$ von f auf die Menge $\overline{K_r(0)}$ mit $\tilde{f}(\overline{K_r(0)}) \subset \operatorname{conv}(f(K)) \subset \operatorname{conv}(K) = K \subset K_r(0)$. Wegen des Ergebnisses aus Fall 1 hat die Abbildung $\tilde{f}$ also einen Fixpunkt x_0 in $\overline{K_r(0)}$, also $x_0 = \tilde{f}(x_0)$. Es folgt $\tilde{f}(x_0) \in K$, also $x_0 \in K$ und $x_0 = f(x_0)$.

Fall 3: Sei h ein Homöomorphismus von K auf K_*, und K_* ist kompakt und konvex.

Die Abbildung $\varphi = h \circ f \circ h^{-1}$ bildet K_* stetig in sich ab und hat demnach einen Fixpunkt $x_{0,*} \in K_*$. Dann ist $x_0 = \varphi^{-1}(x_{0,*}) \in K$ ein Fixpunkt von f in K. □

Wir kommen nun zu **Anwendungen**.

Satz 4.5.2 (Satz von FROBENIUS[8] und PERRON[9]). *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit nichtnegativen Einträgen a_{ij}. Dann existiert ein Eigenvektor x zu einem Eigenwert λ, mit $x_i \geq 0$ für jedes i, und $\lambda \geq 0$.*

[7] Eugène Rouché, 1832–1910
[8] Ferdinand Georg Frobenius, 1849–1917
[9] Oskar Perron, 1880–1975

Beweis. Die Matrix A bildet den ersten Ortanten in sich ab. Dieser ist konvex, aber nicht kompakt. Deshalb definieren wir eine kompakte konvexe Menge K,

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad x_1 + \cdots + x_n = 1\}.$$

Wenn es in K einen Punkt x gibt mit $Ax = 0$, dann sind wir fertig. Also können wir $Ax \neq 0$ für jedes $x \in K$ annehmen. Deshalb können wir eine Abbildung $f : K \to K$ wie folgt definieren:

$$f(x) = \frac{Ax}{\sum_{i=1}^n (Ax)_i}.$$

Nach dem Brouwer-Fixpunktsatz hat f mindestens einen Fixpunkt in K. Dieser ist einer der gesuchten Eigenvektoren. □

Satz 4.5.3 (Existenz von Eigenvektoren für nicht notwendig lineare Abbildungen, oder der Satz vom Igel).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $0 \in \Omega$, n sei ungerade, und $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sei stetig. Dann existiert ein $x \in \partial\Omega$ und ein $\lambda \neq 0$ mit $f(x) = \lambda x$.

Beweis. Nach Lemma A.2.2 können wir $f \in C(\overline{\Omega})$ annehmen. Wei n ungerade ist, gilt $J_{-I} = -1$, und somit $d(-I, \Omega, 0) = -1$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: Sei $d(f, \Omega, 0) \neq -1$.

Setze $h = h(t, x) = (1-t)f(x) - tx$. Wenn $0 \notin h(t, \partial\Omega)$ wäre für jedes $t \in [0, 1]$, dann wären f und $-I$ homotop, und somit $d(f, \Omega, 0) = -1$, was gerade nicht sein soll. Also gibt es $(t_0, x_0) \in [0, 1] \times \partial\Omega$ mit $h(t_0, x_0) = 0$, bzw. $(1 - t_0)f(x_0) = t_0 x_0$. Wegen $x_0 \neq 0$ ist $(1 - t_0) = 0$ unmöglich, und somit haben wir $f(x_0) = (t_0/(1 - t_0))x_0$.

Fall 2: Sei $d(f, \Omega, 0) = -1$.

Setze $h = h(t, x) = (1-t)f(x) + tx$. Wenn $0 \notin h(t, \partial\Omega)$ wäre für jedes $t \in [0, 1]$, dann wären f und $+I$ homotop, und somit $d(f, \Omega, 0) = +1$, was gerade nicht sein soll. Also gibt es $(t_0, x_0) \in [0, 1] \times \partial\Omega$ mit $h(t_0, x_0) = 0$, bzw. $(1 - t_0)f(x_0) = -t_0 x_0$. Sinngemäß weiter wie oben. □

Man kann einen Igel nicht stetig kämmen.

Als weitere Anwendung (die wir hier nur skizzieren) ergibt sich ein etwas kürzerer Beweis des JORDANschen Kurvensatzes.

Satz 4.5.4 (Produktsatz). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\mathbb{R}^n)$, und seien K_i für $i = 1, 2, \dots$ die beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Außerdem sei $y \notin (g \circ f)(\partial\Omega)$. Dann ist*

$$d(g \circ f, \Omega, y) = \sum_i d(f, \Omega, K_i) \cdot d(g, K_i, y).$$

Nur endlich viele Summanden der Summe sind nicht Null.

Beweis. Siehe [1], Seite 48. □

Mit dem Produktsatz kann das folgende (anschaulich halbwegs plausible) Ergebnis bewiesen werden.

Satz 4.5.5. *Es seien Ω_1 und Ω_2 zwei homöomorphe kompakte Mengen des $\mathbb{R}^n$. Dann haben $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_1$ und $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_2$ gleichviele Zusammenhangskomponenten.*

Beweis. Siehe [1], Seite 50. □

Damit ergibt sich fast von selbst der Kurvensatz:

Satz 4.5.6 (**Kurvensatz (1905) von** JORDAN[10]). *Eine geschlossene Jordan-Kurve $K \subset \mathbb{R}^2$ zerlegt $\mathbb{R}^2$ in zwei Gebiete G_1 und G_2 sodaß $\partial G_1 = \partial G_2 = K$ und $G_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G_1}$ gilt.*

Beweis. Jede geschlossene Jordan-Kurve ist homöomorph zum Einheitskreis $\partial K_1(0)$, und dieser zerlegt die Ebene in zwei Gebiete. □

4.6 Der Fixpunktsatz von SCHAUDER

Der Fixpunktsatz von Brouwer kann direkt übertragen werden auf endlich-dimensionale Räume, da diese homöomorph zu einem $\mathbb{R}^n$ sind. Hierbei folgen wir [2].

Für unendlich-dimensionale Räume müssen wir mehr Aufwand treiben.

Definition 4.6.1. *Seien X und Y normierter Räume, und sei $\Omega \subset X$. Ein (nicht notwendig linearer) Operator $F\colon \Omega \to Y$ heißt* kompakt*, wenn F stetig ist und beschränkte Teilmengen von Ω auf relativ kompakte Mengen von Y abbildet (also Mengen, deren Abschluß kompakt in Y) ist.*

Der Operator F heißt endlich-dimensional*, wenn $F(\Omega)$ in einem endlich-dimensionalen Teilraum von Y liegt.*

Falls F linear sein sollte, dann ist die Stetigkeitsforderung überflüssig. Denn wenn F die Einheitskugel in X auf eine beschränkte Menge in Y abbildet, dann ist F eine beschränkte Abbildung, also auch eine stetige Abbildung.

Satz 4.6.2. *Sei $K \subset X$ eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von eines Banachraumes X, sei Y ein weiterer Banachraum, und sei $T\colon K \to Y$ kompakt (nicht notwendig linear). Dann kann T gleichmäßig angenähert werden durch endlich-dimensionale Operatoren T_ε im Sinne von*

$$\|T_\varepsilon(x) - T(x)\|_Y \le \varepsilon, \qquad x \in K.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Die Menge $\overline{T(K)}$ ist kompakt in Y und kann demnach überdeckt werden durch eine Familie von endlich vielen offenen Kugeln $K_\varepsilon(y_i)$, wobei $i = 1, \dots, p$ mit $p = p(\varepsilon)$.

Die Funktionale $\Phi_i(y) = \max\{0, \varepsilon - \|y - y_i\|\}$ sind stetig auf Y, und es gilt

$$\sum_{i=1}^{p} \Phi_i(y) > 0, \qquad y \in \overline{T(K)}.$$

Weil $\overline{T(K)}$ kompakt ist, nimmt diese Summe auf $\overline{T(K)}$ ihr positives Minimum an. Damit können wir stetige Funktionen $\lambda_i\colon \overline{T(K)} \to \mathbb{R}$ definieren gemäß

$$\lambda_i(y) = \frac{\Phi_i(y)}{\sum_{j=1}^{p} \Phi_j(y)}.$$

Offensichtlich ist $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i(y) = 1$ und $\lambda_i(y) \ge 0$ für $y \in \overline{T(K)}$. Wir wählen nun einen stetigen endlich-dimensionalen Operator T_ε als

$$T_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(T(x)) y_i, \qquad x \in K. \tag{4.6.1}$$

Der Fehler zwischen T_ε und T kann nun abgeschätzt werden wie folgt:

$$\|T_\varepsilon(x) - T(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(T(x))(y_i - T(x)) \right\| \le \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(T(x)) \|y_i - T(x)\| \le \varepsilon,$$

denn entweder ist $\lambda_i(T(x)) = 0$ und der entsprechende Summand spielt dann keine Rolle, oder es ist $\lambda_i(T(x)) > 0$, und somit $\|y_i - T(x)\| \le \varepsilon$. □

[10] Marie Ennemond Camille Jordan, 1838–1922. Erster Beweisversuch 1887. Der erste korrekte Beweis (1905) ist aber von Oswald Veblen (1880–1960).

Nun haben wir alle Zutaten für den Fixpunktsatz von SCHAUDER zusammen:

Satz 4.6.3 (**Fixpunktsatz von** SCHAUDER). *Sei $K \subset X$ eine beschränkte, abgeschlossene und konvexe Teilmenge eines Banachraumes X, und sei $T\colon K \to K$ eine kompakte Abbildung.*

Dann hat T mindestens einen Fixpunkt in K.

Beweis. Wir verwenden den vorherigen Satz mit $Y = X$. Die dort auftauchenden Kugelmittelpunkte y_i nennen wir jetzt x_i. Zu jedem $\varepsilon > 0$ sei T_ε die obige ε–Approximation, und es sei $V_\varepsilon = \operatorname{span}(x_1, \dots, x_{p(\varepsilon)})$. Ein scharfer Blick auf (4.6.1) zeigt uns $T_\varepsilon(x) \in \operatorname{conv}(x_1, \dots, x_{p(\varepsilon)})$, wobei conv die konvexe Hülle der nachfolgenden Punkte benennt. Nun sind die x_i in K, und K ist aber konvex.

Also ist $T_\varepsilon(x) \in K$ für $x \in K$, und somit $T_\varepsilon(x) \in K \cap V_\varepsilon$ für $x \in K$.

Insbesondere bildet also T_ε die Menge $K \cap V_\varepsilon$ stetig in sich ab. Nun liegt diese Menge im endlichdimensionalen Raum V_ε und ist beschränkt, abgeschlossen und konvex. Demnach hat, wegen des Fixpunktsatzes von Brouwer, die Abbildung T_ε einen Fixpunkt x_ε in $K \cap V_\varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in K \quad : \quad T_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon.$$

Nun betrachten wir die Folge $\{T(x_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$. Diese liegt in K. Weil nun K eine kompakte Menge ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $\{T(x_{\varepsilon'})\}_{\varepsilon'>0}$ mit einem Grenzwert in K.

Wir beweisen, daß auch $\{x_{\varepsilon'}\}_{\varepsilon'>0}$ eine konvergente Folge ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß diese Folge eine Cauchy–Folge ist. Seien nun also ε_1', $\varepsilon_2' > 0$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \left\|x_{\varepsilon_1'} - x_{\varepsilon_2'}\right\| &= \left\|T_{\varepsilon_1'}(x_{\varepsilon_1'}) - T_{\varepsilon_2'}(x_{\varepsilon_2'})\right\| \\ &\le \left\|T_{\varepsilon_1'}(x_{\varepsilon_1'}) - T(x_{\varepsilon_1'})\right\| + \left\|T(x_{\varepsilon_1'}) - T(x_{\varepsilon_2'})\right\| + \left\|T(x_{\varepsilon_2'}) - T_{\varepsilon_2'}(x_{\varepsilon_2'})\right\| \\ &\le \varepsilon_1' + \left\|T(x_{\varepsilon_1'}) - T(x_{\varepsilon_2'})\right\| + \varepsilon_2', \end{aligned}$$

und der mittlere Summand kann beliebig klein gemacht werden, weil $\{T(x_{\varepsilon'})\}_{\varepsilon'>0}$ nach Konstruktion eine Cauchy–Folge ist.

Also existiert ein $x_* \in X$ mit $x_* = \lim_{\varepsilon'\to 0} x_{\varepsilon'}$. Es ist sogar $x_* \in K$, denn K ist abgeschlossen. Dieser Punkt ist außerdem ein Fixpunkt von T, denn aus der Stetigkeit von T folgt

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon'\to 0} T(x_{\varepsilon'}) = T\left(\lim_{\varepsilon'\to 0} x_{\varepsilon'}\right) = T(x_*), \\ &\|T(x_{\varepsilon'}) - x_*\| \le \|T(x_{\varepsilon'}) - x_{\varepsilon'}\| + \|x_{\varepsilon'} - x_*\| \\ &\qquad = \|T(x_{\varepsilon'}) - T_{\varepsilon'}(x_{\varepsilon'})\| + \|x_{\varepsilon'} - x_*\| \\ &\qquad \le \varepsilon' + \|x_{\varepsilon'} - x_*\|, \end{aligned}$$

und dies strebt nach 0 für $\varepsilon' \to 0$. Also strebt die Folge $\{T(x_{\varepsilon'})\}\varepsilon' > 0$ gleichzeitig nach $T(x_*)$ und nach x_*, was nur bedeuten kann daß

$$T(x_*) = x_*.$$

Damit ist der Fixpunktsatz von Schauder bewiesen. □

Als eine erste Anwendung bekommen wir einen kurzen Beweis für den Satz (1890) von PEANO[11]:

Satz 4.6.4. *Sei $f = f(x, y)\colon [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \to \mathbb{R}$ stetig, und sei $|f|$ dort beschränkt durch eine Schranke M.*

Dann hat das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0$$

eine stetig differenzierbare Lösung $y = y(x)$ in einem Intervall $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, für ein gewisses $\alpha > 0$.

[11] Giuseppe Peano, 1858–1932

Beweis. Als Banachraum X wählen wir $X = C([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]; \mathbb{R})$ mit der üblichen Supremumsnorm. Hierbei ist α mit $0 < \alpha \leq a$ noch unbestimmt. Die konvexe Menge K sei

$$K = \{y \in X\colon \quad |y(x) - y_0| \leq b\}.$$

Man sieht, daß K im Raum X beschränkt und abgeschlossen ist. Der Operator T sei derjenige, der eine Funktion $y \in K$ abbildet auf

$$(T(y))(x) = y_0 + \int_{\xi=x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, \mathrm{d}\xi, \qquad |x - x_0| \leq \alpha.$$

Wenn wir $\alpha \leq b/M$ wählen, dann liegt auch $T(y)$ in K.

Also bildet T die Menge K in sich ab. Weiterhin ist

$$|(T(y))'(x)| \leq M$$

für jedes $y \in K$. Nach dem Satz von Arzela[12]–Ascoli[13] ist dann T eine kompakte Abbildung von K nach X. Der Fixpunktsatz von Schauder beendet dann den Beweis.

Man kann also $\alpha = \min(a, b/M)$ wählen. □

Wir finden stärkere Anwendungen mit dem Leray[14]–Schauder–Grad (1934).

4.7 Der Leray–Schauder–Grad

Wir wollen nun den Begriff des Abbildungsgrades verallgemeinern für Abbildungen der Form $F\colon \overline{U} \to X$, wobei $U \subset X$ eine offene und beschränkte Menge ist, und X ist ein unendlich-dimensionaler Banachraum. Bei der Bestimmung von $d(F, U, y)$ würden wir unsere mittlerweile traditionelle Voraussetzung $y \notin F(\partial U)$ annehmen wollen. Hierbei ergibt sich nun aber ein Problem. Denn aus $y \notin F(\partial U)$ folgt keineswegs $d(y, F(\partial U)) > 0$, es sei denn $F(\partial U)$ wäre in X eine abgeschlossene Menge. Dies ist aber nicht selbstverständlich in unendlich-dimensionalen Räumen.

Bei Banachräumen X von endlicher Dimension hatten wir diese Probleme nicht: dann ist ∂U abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Und weil stetige Abbildungen kompakte Mengen auf kompakte Mengen abbilden, ist $F(\partial U)$ auch kompakt, insbesondere also abgeschlossen.

Der Ausweg besteht in einer Einschränkung an F:

Lemma 4.7.1. *Sei X ein Banachraum, und sei $U \subset X$ eine offene und beschränkte Teilmenge. Sei K ein kompakter Operator von $\overline{U}$ nach X, und sei $F = I - K$. Sei $M \subset \overline{U}$ abgeschlossen.*

Dann ist auch $F(M)$ abgeschlossen.

Beweis. Sei $y \in X$ ein Häufungspunkt von $F(M)$. Zu zeigen wäre, daß $y \in F(M)$ ist.

Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ sodaß $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = y$. Wegen der Kompaktheit von K können wir eine Teilfolge $(x_{n'})_{n'}$ auswählen, für die $\lim_{n'\to\infty} K(x_{n'}) = k$ existiert. Es ist immer noch $\lim_{n'} F(x_{n'}) = y$. Dann folgt, wegen der speziellen Form von F,

$$\lim_{n'} x_{n'} = \lim_{n'} (F(x_{n'}) + K(x_{n'})) = y + k.$$

Weil $x_{n'} \in M$ sind und weil M abgeschlossen ist, haben wir $y + k \in M$. Schließlich ist wegen der Stetigkeit von F

$$y = \lim_{n'} F(x_{n'}) = F(\lim_{n'} x_{n'}) = F(y + k) \in F(M),$$

was den Beweis komplettiert. □

[12] Cesare Arzelà, 1847–1912
[13] Giulio Ascoli, 1843–1896
[14] Jean Leray, 1906–1998

Nun sei $y_0 \notin F(\partial U)$, und somit ist $d(y_0, F(\partial U)) =: \delta > 0$. Wir wählen ein $\varepsilon < \delta/2$ und eine ε–Annäherung K_ε zum kompakten Operator K. Wir können annehmen, daß der Bildbereich V_ε von K_ε endlich-dimensional ist und y_0 enthält. Sei $F_\varepsilon = I - K_\varepsilon$. Für $x \in \partial U$ ist dann $F_\varepsilon(x) \neq y_0$, wegen der Wahl von ε und K_ε. Wir schränken den Definitionsbereich von F_ε ein:

$$F_{\varepsilon,r} := F_\varepsilon\Big|_{V_\varepsilon \cap \overline{U}} \;:\; V_\varepsilon \cap \overline{U} \to V_\varepsilon,$$

und erhalten eine Abbildung $F_{\varepsilon,r}$ zwischen endlich-dimensionalen Räumen, für die der Abbildungsgrad $d(F_{\varepsilon,r}, V_\varepsilon \cap U, y_0)$ auf herkömmliche Weise definiert ist.

Nun definieren wir den Leray–Schauder–Grad:

Definition 4.7.2 (Leray–Schauder–**Grad**). *Für y_0, F_ε und V_ε wie eben, definieren wir den Leray–Schauder–Grad als*

$$D(F, U, y_0) := d(F_{\varepsilon,r}, V_\varepsilon \cap U, y_0).$$

Es bleibt zu zeigen, daß diese Definition unabhängig von der Wahl von ε, K_ε und V_ε ist.

Dafür brauchen wir ein Ergebnis, das uns sagt, daß beim Abbildungsgrad die „invarianten Koordinaten“ keine Rolle spielen:

Lemma 4.7.3. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Wir schreiben $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \oplus \mathbb{R}^{n_2}$, und setzen voraus, daß die stetige Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ mit $f = I + \phi$ die letzten n_2 Komponenten von $x \in \mathbb{R}^n$ nicht verändert, also $\phi\colon \overline{U} \to \mathbb{R}^{n_1} \times \{0\}$. Sei $(y_0, 0) \in (\mathbb{R}^{n_1} \times \{0_{n_2}\}) \setminus f(\partial U)$.*

Dann ist $d(f, U, (y_0, 0)) = d(f_{|U_1}, U_1, y_0)$. Hierbei ist U_1 das Bild von U unter der kanonischen Projektion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_1}$.

Beweis. Es reicht, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ anzunehmen. Weiterhin dürfen wir $y_0 = 0$ voraussetzen.

Wir schreiben $x \in \mathbb{R}^n$ als $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \times \{0_{n_2}\}$ und $x_2 \in \{0_{n_1}\} \times \mathbb{R}^{n_2}$. Außerdem brauchen wir die kanonischen Projektionen, $\pi_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_1}$, $\pi_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_2}$, die x auf die „vorderen“ bzw. „hinteren“ Komponenten abbilden[15].

Wir wählen Funktionen $\Phi_i\colon \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}$ wie in Lemma 4.3.4 mit kleinem Träger in der Nähe von 0_{n_i}, sodaß

$$d(f, U, 0_n) = \int_{x \in U} (\Phi_1 \Phi_2)(f(x)) \cdot J_f(x)\,\mathrm{d}x$$

gilt. Wir haben $f(x) = x + \phi(x) = x_1 + x_2 + \phi(x_1 + x_2) = (\pi_1 x + \pi_1 \phi(x_1 + x_2), \pi_2 x)$, und somit

$$\begin{aligned}
(\Phi_1\Phi_2)(f(x)) &= \Phi_1(\pi_1 x + \pi_1 \phi(x)) \cdot \Phi_2(\pi_2 x), \\
f'(x) &= \begin{pmatrix} I_{n_1} + \partial_1(\pi_1\phi) & \partial_2(\pi_1\phi) \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}, \\
J_f(x) &= \det\left(I_{n_1} + \frac{\partial(\pi_1\phi)}{\partial(\pi_1 x)} \right).
\end{aligned}$$

Jetzt lassen wir Φ_2 gegen die Delta-Distribution $\delta_2\colon \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$ streben und sind fertig. □

Nun können wir zeigen, daß die Wahl von ε und K_ε auf den Wert des Leray–Schauder–Grades keinen Einfluß hat. Sei dazu $\eta < \delta/2$ und K_η eine andere Approximation von K mit $K_\eta\colon U \to V_\eta$. Dementsprechend erhalten wir eine Abbildung F_η und ihre Einschränkung (Restriktion) $F_{\eta,r}$ mit

$$F_\eta\colon \overline{U} \to X, \qquad F_{\eta,r}\colon V_\eta \cap \overline{U} \to V_\eta.$$

Unser Ziel ist zu zeigen, daß

$$d(F_{\varepsilon,r}, V_\varepsilon \cap U, y_0) = d(F_{\eta,r}, V_\eta \cap U, y_0).$$

[15] Wir wollen uns Mühe geben, zwischen $x_1 \in \mathbb{R}^n$ und $\pi_1 x \in \mathbb{R}^{n_1}$ zu unterscheiden. . . .

Wir setzen $V = V_\varepsilon + V_\eta$, im Sinne einer (nicht notwendig direkten) Summe von Untervektorräumen. Offensichtlich ist V endlich-dimensional. Wenn wir gegebenenfalls aus V_ε bzw. V_η einige Basisvektoren weglassen, kommen wir zu kleineren Räumen $\tilde{V}_\varepsilon$ bzw. $\tilde{V}_\eta$, für die dann (im Sinne von direkten Summen) gilt:

$$V = V_\varepsilon \oplus \tilde{V}_\eta = \tilde{V}_\varepsilon \oplus V_\eta.$$

Die Abbildungen F_ε und F_η sind auf $\overline{U}$ definiert. Also können wir sie auch einschränken auf $V \cap \overline{U}$:

$$F_{\varepsilon,V} \colon V \cap \overline{U} \to V, \qquad F_{\eta,V} \colon V \cap \overline{U} \to V.$$

Nach obigem Lemma ist

$$d(F_{\varepsilon,V}, V \cap U, y_0) = d(F_{\varepsilon,r}, V_\varepsilon \cap U, y_0),$$
$$d(F_{\eta,V}, V \cap U, y_0) = d(F_{\eta,r}, V_\eta \cap U, y_0).$$

Wir sind fertig, wenn wir zeigen können, daß die linken Seiten gleich sind.

Wir setzen dazu $F_t = tF_{\varepsilon,V} + (1-t)F_{\eta,V} \colon V \cap \overline{U} \to V$ für $0 \leq t \leq 1$. Stets ist $y_0 \notin F_t(\partial U)$, und somit liefert das übliche Homotopieargument

$$d(F_0, V \cap U, y_0) = d(F_1, V \cap U, y_0).$$

Damit ist gezeigt, daß die Wahl von ε und K_ε keinen Einfluß hat auf den Wert des Leray–Schauder–Grades, solange nur $\varepsilon < d(y_0, F(\partial U))/2$ gilt.

Da nun die Definition des Leray–Schauder–Grades gerechtfertigt ist, können wir einige Eigenschaften auflisten:

Satz 4.7.4. *Sei X ein reeller Banachraum und*

$$M = \{(F, U, y) \colon U \subset X \text{ offen, beschränkt }, F = I - K,\ K \text{ kompakt},\ y \notin F(\partial U)\}.$$

Dann hat der oben definierte Leray–Schauder–Grad $d \colon M \to \mathbb{Z}$ folgende Eigenschaften:

- *$d(I, U, y) = 1$ für $y \in U$ und $= 0$ sonst,*
- *Wenn $d(F, U, y) \neq 0$, dann existiert ein $x \in U$ mit $F(x) = y$,*
- *Ist K_0 eine kompakte Homotopie auf U, $F = I - K_0$ und $y \notin F([0,1] \times \partial U)$, dann ist $d(F(t,\cdot), U, y)$ auf $[0,1]$ konstant.*
- *Für $\tilde{F} = I - \tilde{K}$ (wobei $\tilde{K}$ kompakt ist) und $K(x) = \tilde{K}(x)$ für jedes $x \in \partial U$ ist $d(F, U, y) = f(\tilde{F}, U, y)$.*
- *Für $\tilde{F} = I - \tilde{K}$ (wobei $\tilde{K}$ kompakt ist) und $\sup_{x \in \overline{U}} \left\| K(x) - \tilde{K}(x) \right\|_X < d(y, F(\partial U))$ ist $d(K, U, y) = d(\tilde{K}, U, y)$.*

Beweis. Im Prinzip wie beim Abbildungsgrad. □

Wir haben einige Anwendungen:

Satz 4.7.5. *Sei X ein reeller Banachraum mit $\dim X = \infty$, $U \subset X$ sei offen und beschränkt, $0 \in U$, $K \colon \overline{U} \to X$ sei kompakt, und sei $\inf_{x \in \partial U} \|K(x)\| > 0$. Dann hat K einen positiven und einen negativen Eigenwert, das heißt: es gibt Zahlen $\lambda_- < 0 < \lambda_+$ und Punkte $x_\pm \in U \setminus \{0\}$ mit $K(x_\pm) = \lambda_\pm x_\pm$.*

Beweis. Siehe [1], Seite 70. □

Bemerkung 4.7.6. Für $\dim X < \infty$ ist der Satz i.A. falsch, wie man sich anhand von Drehungen überlegen kann.

Bemerkung 4.7.7. Die Voraussetzung $\inf_{x\in\partial U}\|K(x)\| > 0$ schließt lineare K aus: denn sei z.B. $U = K_1(0)$. Wegen $\dim X = \infty$ gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\|x_n - x_m\| \geq 1$ für alle $n \neq m$ (siehe [1], Seite 12). Offensichtlich ist auch $2 \geq \|x_n - x_m\|$. Damit liegen die Differenzvektoren $x_n - x_m$ „zwischen ∂U und $\partial(2U)$“.

Sei nun $\inf_{x\in\partial U}\|K(x)\| = \alpha > 0$. Wenn K linear ist, gilt also $\|K(x_n) - K(x_m)\| = \|K(x_n - x_m)\| \geq \alpha$. Weil K andererseits kompakt ist, wird die beschränkte abgeschlossene Menge $\overline{U}$ in eine kompakte Teilmenge von X abgebildet, also hat $(K(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Diese muß also eine Cauchyfolge sein, im Widerspruch zu $\|K(x_n) - K(x_m)\| \geq \alpha > 0$.

Wir haben also einen Satz für echt unendlich-dimensionale nichtlineare Situationen.

Beispiel: *Die Integralgleichung*

$$x(t) = \lambda \int_{t=0}^{1} (t^2 + s^2)x^2(s)\,\mathrm{d}x, \qquad t \in [0,1],$$

hat für mindestens zwei Werte $\lambda \neq 0$ eine auf $[0,1]$ stetige Lösung $x \neq 0$.

Satz 4.7.8 (**Satz von** BORSUK[16]**).** *Sei $U \subset X$ offen, beschränkt und symmetrisch im Sinne von $-U = U$. Sei $0 \in U$ und $F = I - K$ mit kompaktem $K\colon \overline{U} \to X$. Sei weiterhin $0 \notin F(\partial U)$, und für jedes $x \in \partial U$ sei*

$$\frac{F(x)}{\|F(x)\|} \neq \frac{F(-x)}{\|F(-x)\|}.$$

Dann ist $d(F, U, 0)$ ungerade.

Beweis. Siehe [1], Seite 72. □

Bemerkung 4.7.9. Insbesondere ist $d(F, U, 0) \neq 0$, und somit hat F eine Nullstelle in U. Der Satz gilt zum Beispiel, wenn $0 \notin F(\partial U)$ und F ungerade ist.

4.8 Anwendung des LERAY–SCHAUDER–Grades

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Rand aus dem $C^{2,\lambda}$ für ein $\lambda \in (0,1)$.

Wir betrachten das elliptische Randwertproblem

$$\triangle\, u = f(x, u, \nabla u), \qquad x \in \Omega, \tag{4.8.1}$$
$$u(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega \tag{4.8.2}$$

wobei $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ ist mit $f(\cdot, u, p) \in C^\lambda(\overline{\Omega})$ für jegliche $(u,p) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$.

Für die Nichtlinearität setzen wir voraus, daß Konstanten C_1 und $\alpha \in (0,1)$ existieren mit

$$|f(x,u,p)| \leq C_1\,(1 + |u|^\alpha + |p|^\alpha)\,, \qquad \forall\ (x,u,p) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^{1+n}.$$

Satz 4.8.1. *Unter diesen Voraussetzungen hat das Randwertproblem (4.8.1)–(4.8.2) mindestens eine Lösung $u \in C^{2,\lambda}(\overline{\Omega})$.*

Beweis. Wir definieren einen Banachraum

$$X = \left\{u \in C^1(\overline{\Omega})\colon u_{|\partial\Omega} = 0\right\}$$

und betrachten den Operator $K = (\triangle_{|D})^{-1}$, der eine Funktion $g \in C(\overline{\Omega})$ abbildet auf die Lösung $u \in X$ von

$$\triangle\, u = g, \qquad u_{\partial\Omega} = 0.$$

[16] Karol Borsuk, 1905–1982

Dieser Operator ist linear und beschränkt im Sinne von $\|Kg\|_X \le C_0 \|g\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Weiterhin haben wir den Einsetzungsoperator

$$F\colon u(\cdot) \mapsto f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot)).$$

Dann können wir (4.8.1)–(4.8.2) umschreiben zu $u = K \circ F(u)$ oder $u - K \circ F(u) = 0$. Im Folgenden werden wir eine Teilmenge $U \subset X$ konstruieren und zeigen, daß

$$d(I - K \circ F, U, 0) = 1$$

ist, womit gezeigt wäre, daß $I - K \circ F$ mindestens eine Nullstelle in der Menge U hat.

Eine entscheidende Zutat ist folgende *a priori* Abschätzung:

Lemma 4.8.2. *Es gibt eine Konstante C_2 (die streng monoton von C_1 abhängt) mit folgender Eigenschaft:*

Wenn $u \in C^{2,\lambda}(\overline{\Omega})$ eine Lösung von (4.8.1)–(4.8.2) ist, dann gilt

$$\|u\|_X \le C_2.$$

Aus den Schauder-Abschätzungen folgt: wenn $u \in X$ eine Lösung ist, dann ist $u \in C^{2,\lambda}(\overline{\Omega})$, denn es ist $f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot)) \in C(\overline{\Omega})$, und somit $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ für jedes $\beta \in (0,1)$, und damit ist dann auch $f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot)) \in C^\lambda(\overline{\Omega})$

Wir haben also: falls $(I - K \circ F)(u) = 0$ und $u \in X$, dann ist $\|u\|_X \le C_2$.

Wir haben sogar mehr: falls $0 \le t \le 1$ und $(I - tK \circ F)(u) = 0$ für ein $u \in X$, dann ist $\|u\|_X \le C_2$.

Nun sind wir in der Lage, die Teilmenge U zu definieren:

$$U = \{u \in X\colon\ \|u\|_X \le C_2 + 1\}.$$

Wir haben eben festgestellt, daß $0 \notin (I - tK \circ F)(\partial U)$. Weiterhin bildet $tK \circ F$ von X nach $C^{2,\lambda}(\overline{\Omega})$ ab, und die Einbettung $C^{2,\lambda}(\overline{\Omega}) \subset X$ ist kompakt.

Aus dem üblichen Homotopieargument folgt nun

$$d(I - tK \circ F, U, 0) = \text{const.}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Für $t = 0$ ist dieser Leray–Schauder–Grad aber gerade gleich eins, denn $0 \in U$. □

Beweis von Lemma 4.8.2. Ab jetzt sei $u \in C^{2,\lambda}(\overline{\Omega})$ eine solche Lösung. Wir bilden das $L^2(\Omega)$–Skalarprodukt von (4.8.1) und u:

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} &\le \int_\Omega |f(x, u(x), \nabla u(x))| \cdot |u(x)| \,\mathrm{d}x \\ &\le C_1 \int_\Omega (1 + |u(x)|^\alpha + |\nabla u(x)|^\alpha) \cdot |u(x)| \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Wir wenden die Young'sche Ungleichung mit Exponenten $\frac{2}{\alpha}$ und $\frac{2}{2-\alpha}$ an:

$$|\nabla u(x)|^\alpha \cdot |u(x)| \le \varepsilon |\nabla u(x)|^2 + C_\varepsilon |u(x)|^{\frac{2}{2-\alpha}}.$$

Wenn wir weiterhin die Stetigkeit der Einbettungen $L^2(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ für $p \le 2$ benutzen, bekommen wir

$$\int_\Omega |f| \cdot |u| \,\mathrm{d}x \le \varepsilon \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + C \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|^{1+\alpha}_{L^2(\Omega)} + \|u\|^{\frac{2}{2-\alpha}}_{L^2(\Omega)} \right).$$

Man beachte, daß die Exponenten in der Klammer alle kleiner als 2 sind. Für kleine ε bekommen wir so

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \le C \left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|^{1+\alpha}_{L^2(\Omega)} + \|u\|^{\frac{2}{2-\alpha}}_{L^2(\Omega)} \right).$$

Außerdem haben wir die Poincare–Ungleichung, weil $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$: $\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$.

Wenn man dies einsetzt und auf die Exponenten von $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ achtet, findet man eine *a priori* Abschätzung für u im Raum $W^{1,2}(\Omega)$. Wenn man dann die Schauder–Abschätzung verwendet, bekommt man eine Konstante M_1 mit

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \le M_1.$$

Nun gilt: der Einsetzoperator F bildet $W^{1,p}(\Omega)$ stetig (aber meist nichtlinear) nach $L^p(\Omega)$ ab, für jedes $1 \le p \le \infty$.

Der Lösungsoperator K bildet $L^p(\Omega)$ stetig und linear nach $W^{2,p}(\Omega)$ ab, für jedes $1 < p < \infty$.

Weiterhin haben wir die Stetigkeit der Einbettung

$$W^{2,p}(\Omega) \subset W^{1,q}(\Omega), \qquad 1 = n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

Wir finden also eine Folge $(p_1, p_2, \dots)$ mit $p_1 = 2$ und $\frac{1}{p_{j+1}} = \frac{1}{p_j} - \frac{1}{n}$ und eine Folge $(M_1, M_2, \dots)$ mit

$$\|u\|_{W^{2,p_j}} \le M_j.$$

Für ein genügend großes j erhalten wir dann eine Abschätzung der Norm $\|u\|_{C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})}$ über den Einbettungssatz von Sobolev. □

A.1 Nachzuholende Beweise

Beweis des SARD*schen Lemmas.* Weil Ω meßbar ist, können wir Ω schreiben als abzählbare Vereinigung von Würfeln $Q_i \subset \Omega$. Sei Q ein solcher Würfel. Es reicht zu zeigen, daß $\mu(f(N_f(Q))) = 0$ ist.

Sei ϱ die Kantenlänge von Q. Die Ableitung $f'(x)$ ist auf Q beschränkt und gleichmäßig stetig, also gilt:

$$\exists c > 0 \quad \forall x \in Q\colon \quad \|f'(x)\| \le c,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists l \in \mathbb{N} \quad \forall x, x_0 \in Q, \quad \|x - x_0\| \le \delta := \frac{\sqrt{n}\varrho}{l}: \quad \|f(x) - f(x_0)\| \le \varepsilon.$$

Nun haben wir für alle solchen $x, x_0 \in Q$ mit $\|x - x_0\| \le \delta$:

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\| &\le \int_{t=0}^{1} \|f'(x_0 + t(x - x_0)) - f'(x_0)\| \cdot \|x - x_0\| \, \mathrm{d}t \\ &\le \varepsilon \|x - x_0\|.\end{aligned}$$

Wir zerlegen Q in Würfel Q_k mit Durchmesser δ, also Kantenlänge $\delta/\sqrt{n}$. In jeder Koordinatenrichtung haben wir l Stück. Die Anzahl dieser Teilwürfel ist dann $r = l^n$. Für x, $x_0 \in Q_k$ gilt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0), \qquad \|R(x, x_0)\| \le \delta\varepsilon.$$

Sei[17] $x_k \in Q_k \cap N_f$. Wir definieren $A := f'(x_k)$ und $g(y) = f(x_k + y) - f(x_k)$ für $y \in Q_k - x_k$. Hierbei bedeutet $\tilde{Q_k} := Q_k - x_k$ ein in die Nähe des Ursprungs verschobener Würfel. Dann ist

$$g(y) = Ay + \tilde{R}(y), \qquad \left\|\tilde{R}(y)\right\| = \|R(x_k + y, x_k)\| \le \delta\varepsilon.$$

Weil $\det A = 0$ ist, liegt $A(\tilde{Q_k})$ in einem $(n-1)$–dimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Daher existiert ein $b_1 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|b_1\| = 1$ und $\langle x, b_1 \rangle = 0$ für alle $x \in A(\tilde{Q_k})$. Wir ergänzen b_1 zu einer ONB $(b_1, \dots, b_n)$ des $\mathbb{R}^n$. Dann ist

$$g(y) = \sum_{j=1}^{n} \langle g(y), b_j \rangle \, b_j,$$

$$|\langle g(y), b_1 \rangle| \le |\langle Ay, b_1 \rangle| + \left|\left\langle \tilde{R}(y), b_1 \right\rangle\right| \le 0 + \left\|\tilde{R}(y)\right\| \|b_1\| \le \delta\varepsilon,$$

$$|\langle g(y), b_j \rangle| \le \|A\| \, \|y\| + \delta\varepsilon, \qquad j \ge 2.$$

[17] Wenn es für ein gewisses Q_k kein solches x_k gibt, um so besser.

Insgesamt liegt $f(Q_k)$ dann in einem Quader (achsenparallel zu den neuen Basisvektoren) I_k um $f(x_k)$ mit Volumen $\mu(I_k) \le (2(\|A\|\,\delta + \delta\varepsilon))^{n-1} \cdot (2\delta\varepsilon) = 2^n(\|A\| + \varepsilon)^{n-1}\varepsilon\delta^n$.

Nun gilt $f(N_f(Q)) \subset \cup_{k=1}^r I_k$, und deshalb

$$\begin{aligned}\mu(f(N_f(Q))) &\le \sum_{k=1}^r \mu(I_k) = \sum_{k=1}^r (2\delta)^n \left(\|f'(x_k)\| + \varepsilon\right)^{n-1}\varepsilon \le r(2\delta)^n(c+\varepsilon)^{n-1}\varepsilon \\ &\le (2\delta l)^n(c+\varepsilon)^{n-1}\varepsilon = (2\sqrt{n}\varrho)^n(c+\varepsilon)^{n-1}\varepsilon = \mathfrak{O}(\varepsilon).\end{aligned}$$

Das können wir mit jedem $\varepsilon > 0$ wiederholen, und somit ist $\mu(f(N_f(Q))) = 0$. □

Beweis von Lemma 4.3.5. Seien $y_1,\, y_2 \in K_\alpha(y_0) \setminus f(N_f)$, und sei

$$\delta = \alpha - \max(\|y_1 - y_0\|\,, \|y_2 - y_0\|).$$

Nach Lemma 4.3.4 kann man $0 < \varepsilon < \delta$ so wählen, daß

$$d(f, \Omega, y_i) = \int_{x\in\Omega} \Phi_\varepsilon(f(x) - y_i)J_f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad i = 1, 2.$$

Für C^1– Funktionen $\Psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kann man immer schreiben

$$\Psi(u_2) - \Psi(u_1) = \int_{t=0}^1 \Psi'(u_1 + t(u_2 - u_1))\,\mathrm{d}t \cdot (u_2 - u_1).$$

In diesem Sinne haben wir

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(z - y_2) - \Phi_\varepsilon(z - y_1) &= \Phi_\varepsilon(z - y_1 + (y_1 - y_2)) - \Phi_\varepsilon(z - y_1) \\ &= \operatorname{div}_z W(z) = \operatorname{div}_z \left(\int_{t=0}^1 \Phi_\varepsilon(z - y_1 + t(y_1 - y_2))\,\mathrm{d}t \cdot (y_1 - y_2)\right).\end{aligned}$$

Falls $0 \le t \le 1$, dann liegt $z - y_1 + t(y_2 - y_1)$ auf der Verbindungsstrecke zwischen $z - y_1$ und $z - y_2$. Dann ist $z - y_1 + t(y_2 - y_1)$ gleich einem gewissen Vektor zwischen z und einem Punkt auf der Verbindungsstrecke von y_1 und y_2.

Wenn nun $|z - y_0| > \alpha$ ist, dann ist z von der Verbindungsstrecke zwischen y_1 und y_2 um mindestens δ entfernt (man beachte die Definition von δ und mache eine Skizze). Weil aber $\Phi_\varepsilon(\zeta) = 0$ für $|\zeta| > \varepsilon$, und $\delta > \varepsilon$ ist, gilt demnach $W(z) = 0$ für $|z - y_0| > \alpha$.

Also ist $\operatorname{supp} W \subset K_\alpha(y_0)$. Für z in einer Umgebung von $f(\partial\Omega)$ ist dann $W(z) = 0$.

Ein schlauer Geist schlägt uns vor, folgende Funktion $v = (v_1, \ldots, v_n)^\top$ zu untersuchen:

$$v_i(x) = \sum_{j=1}^n W_j(f(x))\left((f'(x))^{co}\right)_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

wobei $(f')^{co}$ die Kofaktormatrix von f' bedeutet. Dann ist $v(x) = 0$ für x in der Nähe von $\partial\Omega$.

Mit Lemma A.2.1 (und dem üblichen Kroneckersymbol δ_{kj}) haben wir dann

$$\begin{aligned}\operatorname{div} v(x) &= \sum_i \partial_i v_i(x) \\ &= \sum_{i,j} (\partial_{x_i} W_j(f(x)))\left((f'(x))^{co}\right)_{ij} + \sum_j W_j(f(x)) \sum_i \partial_i \left((f'(x))^{co}\right)_{ij} \\ &= \sum_{i,j}\sum_k (\partial_{f_k} W_j(f(x)))\left(\partial_{x_j} f_k\right)\left((f'(x))^{co}\right)_{ij} + 0 \\ &= \sum_{k,j} (\partial_{f_k} W_j(f(x))) \sum_i (f'(x))_{ki}\left((f'(x))^{co}\right)_{ij} \\ &= \sum_{k,j} (\partial_{f_k} W_j(f(x)))\,\delta_{kj} \det f'(x) \\ &= (\operatorname{div}_f W(f(x)))J_f(x).\end{aligned}$$

Aus dem Gauß-Integralsatz haben wir $\int_{x\in\Omega} \operatorname{div} v(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Alles ineinander eingesetzt, ergibt sich somit $d(f,\Omega,y_2) - d(f,\Omega,y_1) = 0$.

Die Voraussetzung $f \in C^2(\Omega)$ wurde in Lemma A.2.1 verwendet. □

Beweis von Lemma 4.4.1.

Fall 1: Sei $f^{-1}(y) = \emptyset$.

Dann ist der Abstand $\beta = d(y, f(\overline{\Omega}))$ positiv, also auch $d(y, f_t(\overline{\Omega})) \geq \beta/2$ für kleine $|t|$.

Damit hat f_t keine y-Stelle, und somit ist $d(f_t,\Omega,y) = 0$, wie gewünscht.

Fall 2: Sei $f^{-1}(y) = \{x_1,\dots,x_m\}$ und $J_f(x_i) \neq 0$ für $i = 1,\dots,m$.

Wir betrachten $F\colon \mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ mit $F(t,x) = f(x) + tg(x) - y$ und wenden den Satz über implizite Funktionen an. Dazu prüfen wir die Voraussetzungen: Es ist F stetig, und stetig differenzierbar nach x. Es ist $F(0,x_i) = y - y = 0$. Und es ist

$$F_x(0,x_i) = f'(x_i) + (tg'(x_i))\Big|_{t=0} = f'(x_i),$$

was nun eine invertierbare Matrix ist. Also können wir die Gleichung $F(t,x) = 0$ nach x umstellen: es existieren $r_i > 0$, $\varrho_i > 0$, und genau eine Funktion $\Phi_i = \Phi_i(t)$ mit $\Phi_i(0) = x_i$ und $F(t,\Phi_i(t)) = 0$ für $|t| < r_i$, also $f_t(\Phi_i(t)) = y$. Die Funktion Φ_i bildet das Intervall $(-r_i, r_i)$ ab nach $K_{\varrho_i}(x_i) \subset \Omega$.

Wir können annehmen, daß die Kugeln $\overline{K_{\varrho_i}(x_i)}$ paarweise disjunkt sind, und daß $\det f'(x)$ auf diesen Kugeln das Vorzeichen nicht wechselt. Nun setzen wir $r = \min_i r_i$ und $V = \cup_{i=1}^m K_{\varrho_i}(x_i)$, und wir nehmen ab jetzt $|t| < r$ an.

Dann ist $f_t^{-1}(y) \cap V = \{\Phi_1(t),\dots,\Phi_m(t)\}$.

Wir haben also $f(x) \neq y$ für $x \in \overline{\Omega}\setminus V$, und letzteres ist eine kompakte Menge. Also existiert ein positived β mit $\|f(x) - y\| \geq \beta$ für solche x. Nun wählen wir

$$\delta_0 = \min\{r, \beta/\|g\|\}$$

und schränken $|t|$ weiter ein, nämlich zu $|t| < \delta$. Dann ist $y \notin f_t(\partial\Omega)$ für $|t| < \delta$. Dann ist $f_t^{-1}(y) = \{\Phi_1(t),\dots,\Phi_m(t)\}$.

Weiterhin ist $J_{f_t}(x)$ eine stetige Funktion in den beiden Variablen t und x. Also hat für ggf. noch weiter eingeschränkte $|t|$ die Determinante $J_{f_t}(\Phi_i(t))$ dasselbe Vorzeichen wie $J_f(x_i)$. Das liefert dann $d(f_t,\Omega,y) = d(f,\Omega,y)$.

Fall 3: Sei nun $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ und $y \in f(N_f(\Omega))$ und $\alpha = d(y, f(\partial\Omega)) > 0$.

Wir wählen ein $y_* \in K_{\alpha/3}(y) \setminus f(N_f(\Omega))$ und haben $d(f,\Omega,y_*) = d(f,\Omega,y)$.

Aus dem Fall 2 haben wir ein $\delta_* > 0$ mit $d(f_t,\Omega,y_*) = d(f,\Omega,y_*)$ für alle t mit $|t| < \delta_*$.

Nun wählen wir $\delta = \min\{\delta_*, \alpha/(3\|g\|)\}$ und erhalten $\|y_* - f_t(x)\| \geq \alpha/3$ für $x \in \partial\Omega$ und $|t| < \delta$.

Für diese t ist somit $\|y - y_*\| < \alpha/3 \leq d(y_*, f_t(\partial\Omega))$. Wegen Lemma 4.3.5 haben wir dann $d(f_t,\Omega,y) = d(f_t,\Omega,y_*)$. Alles zusammengefaßt ergibt dann $d(f,\Omega,y) = d(f_t,\Omega,y)$. □

A.2 Sonstiges

Wir brauchen die Kofaktormatrix: die Kofaktormatrix A^{co} zu einer $n\times n$ Matrix A ist diejenige Matrix, für die $A^{co}\cdot A = \det(A)I$ gilt. Diese Matrix A^{co} gibt es immer, auch wenn A singulär ist. Falls A regulär ist, dann gilt $A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^{co}$.

Der Eintrag a_{ij}^{co} von A^{co} ergibt sich wie folgt: von A streichen wir Zeile j und Spalte i, nehmen vom Rest die $(n-1)$–Determinante, und multiplizieren mit $(-1)^{i+j}$.

Lemma A.2.1. *Sei $f \in C^2(\Omega)$. Dann gilt für $x \in \Omega$ und jedes j:*

$$\sum_{i=1}^n \partial_i \left((f'(x))^{co}\right)_{ij} = 0.$$

Beweis. Siehe [1], Seite 27. □

Die Bedingung $f \in C^2$ braucht man für den Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit gemischter Ableitungen.

Lemma A.2.2. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ abgeschlossen, und sei $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein normierter Raum. Weiterhin sei $F\colon A \to Y$ stetig. Dann existiert eine stetige Fortsetzung $\tilde{F}$ von F auf X mit $\tilde{F}(X) \subset \operatorname{conv}(F(A))$.*

Hierbei bedeutet $\operatorname{conv}(B)$ *die konvexe Hülle einer Menge B eines linearen Raumes.*

Beweis. Siehe [1], Seite 21. □

Literaturverzeichnis

[1] Klaus Deimling. *Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade.* Hochschultext. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1974.

[2] Joel Smoller. *Shock waves and reaction-diffusion equations.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. 258. New York: Springer- Verlag, 1994.