Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

19.04.2011

Übungen zur Funktionentheorie Blatt 1

Die Lösungen sind abzugeben am Donnerstag, 28.04.2011, in den Briefkästen auf F4.
Gemeinsame Abgabe in Zweiterteams ist zulässig,
solange jede/r der Beteiligten jede Lösung auf überzeugende Weise präsentieren kann.

1. Es sei $f(z) = z^3$. Man zeige, daß KEIN Punkt c auf der Verbindungsstrecke von i nach 1 existiert, für den
$$\frac{f(\mathrm{i}) - f(1)}{\mathrm{i} - 1} = f'(c)$$
gilt. Der Mittelwertsatz gilt also nicht !

2. Man bestimme die holomorphe Funktion $w = u + \mathrm{i}v$, für die
$$u(x, y) = x^2 - y^2 + xy, \quad w(0) = 0$$
gilt. (Es sei hierbei $z = x + \mathrm{i}y$, wie immer.)

3. Man zeige, daß Realteil und Imaginärteil des Hauptzweigs des komplexen Logarithmus die Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen lösen. Ermitteln Sie die Ableitung dieser Funktion.

4. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch,* wenn $\triangle h(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

   Sei h harmonisch. Man finde alle holomorphen Funktionen f mit $h \equiv \Re f$.

5. Auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ betrachten wir die Funktion $f = f(z) = 1/\overline{z}$.
   (a) Man finde alle Punkte, die von f auf sich abgebildet werden.
   (b) Finden Sie alle Geraden, die von f auf sich selbst abgebildet werden (aber nicht unbedingt punktweise).
   (c) Man zeige: jede Kreislinie, die durch den Ursprung verläuft, wird auf eine Gerade abgebildet.
   (d) * Jede Kreislinie, die nicht durch den Ursprung verläuft, wird auf eine Kreislinie abgebildet, die auch nicht durch den Ursprung verläuft.