Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

29.04.2011

Übungen zur Funktionentheorie Blatt 2

Die Lösungen sind abzugeben am Donnerstag, 12.05.2011, in den Briefkästen auf F4.
Gemeinsame Abgabe in Zweiterteams ist zulässig,
solange jede/r der Beteiligten jede Lösung auf überzeugende Weise präsentieren kann.

1. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Zeigen Sie, daß dann auch $h = h(z) := \overline{f(\overline{z})}$ eine ganze Funktion ist.

2. Sei Ω ein konvexes Gebiet in $\mathbb{C}$, und sei dort f eine holomorphe Funktion mit stetiger Ableitung f', für die wir $\Re f'(z) \neq 0$ überall in Ω voraussetzen.

   Zeigen Sie, daß dann f injektiv ist.

3. Bestimmen Sie für folgende Funktionen die Potenzreihen am Entwicklungspunkt $z_0 = 0$:

$$f_1 = f_1(z) := \frac{1}{z^2+4}, \qquad f_2 = f_2(z) := \frac{1}{(1-z^2)(z+\mathrm{i})}, \qquad f_3 = f_3(z) := \sin(z^2-1).$$

   Arbeiten Sie ökonomisch und elegant. Das Aufgabenziel besteht nicht im Kampfrechnen.

4. Gegeben sei eine Kurve Γ mit einer Parametrisierung $\gamma = \gamma(t) = (1+t^2)\exp(2\pi\mathrm{i}t)$, für $t \in [-1, 1]$. Berechnen Sie die Umlaufzahl um $z_0 := 0$ durch Auswerten des Integrals $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma z^{-1}\,\mathrm{d}z$. Skizzieren Sie die Kurve Γ und tragen Sie in jede Zusammenhangskomponente die entsprechende Umlaufzahl ein.

5. Es sei Ln der Hauptteil des komplexen Logarithmus, definiert auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Sei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

   (a) Zeigen Sie: die Funktion $z \mapsto z^a := \exp(a \operatorname{Ln} z)$ ist in der genannten geschlitzten Ebene holomorph, und es ist dort $(z^a)' = az^{a-1}$.

   (b) Bestimmen Sie Real– und Imaginärteile der folgenden Zahlen:

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}}, \qquad (2+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}, \qquad (\operatorname{Ln}\mathrm{i})^{\mathrm{i}}.$$

   (c) Diskutieren Sie:

$$2 = \exp(\operatorname{Ln} 2) = \exp\left(2\pi\mathrm{i}\frac{\operatorname{Ln} 2}{2\pi\mathrm{i}}\right) = (\exp(2\pi\mathrm{i}))^{\frac{\operatorname{Ln} 2}{2\pi\mathrm{i}}} = 1^{\frac{\operatorname{Ln} 2}{2\pi\mathrm{i}}} = 1.$$