Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

16.05.2011

Übungen zur Funktionentheorie Blatt 3

Die Lösungen sind abzugeben am Donnerstag, 26.05.2011,
(oder je nach Vereinbarung mit den Übungsleitern) in den Briefkästen auf F4.
Gemeinsame Abgabe in Zweiterteams ist zulässig,
solange jede/r der Beteiligten jede Lösung auf überzeugende Weise präsentieren kann.

1. Sei f eine ganze Funktion, für die es Konstanten C, $N \in \mathbb{N}$ und R gibt, sodaß die Ungleichung $|f(z)| \leq C|z|^N$ gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$. Man beweise, daß dann f ein Polynom vom Grad $\leq N$ sein muß.

2. Sei Γ die Einheitskreislinie, in Gegenuhrzeigersinn durchlaufen. Man bestimme die Werte der Integrale
$$\oint_\Gamma \frac{\cos z}{z}\,\mathrm{d}z, \qquad \oint_\Gamma \frac{\cos z}{z^2}\,\mathrm{d}z, \qquad \oint_\Gamma \frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z.$$

3. Finden Sie **eine** holomorphe Funktion, die die obere Halbebene auf die Einheitskreisscheibe abbildet, und den Punkt i auf 0.

4. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wohin bildet die Abbildung $f = f(z) = z^n + z^{-n}$ die Einheitskreislinie ab ? Was hat das mit Tschebyscheff–Polynomen zu tun ?

5. Es seien a_0, a_1, …, a_n die Ziffern einer im Dezimalsystem $(n+1)$–ziffrigen Zahl A, also
$$A = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0, \qquad 1 \leq a_n \leq 9, \quad 0 \leq a_{n-1}, \ldots, a_0 \leq 9.$$
Sei $P = P(z)$ das Polynom $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$.
Man beweise: die Nullstellen von P können nur im Innern der linken Halbebene oder im Kreis
$$\left\{ z \in \mathbb{C} \colon |z| < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{37}) \right\}$$
liegen, aber nirgendwo sonst. Gilt die Behauptung immer noch mit einer 23 anstelle der 37 ?