Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

01.06.2011

Übungen zur Funktionentheorie Blatt 4

Die Lösungen sind abzugeben am Donnerstag, 09.06.,
(oder je nach Vereinbarung mit den Übungsleitern) in den Briefkästen auf F4.
Gemeinsame Abgabe in Zweiterteams ist zulässig,
solange jede/r der Beteiligten jede Lösung auf überzeugende Weise präsentieren kann.

1. Es seien κ und ε reelle Konstanten. Gesucht ist eine **ganze** Funktion $w = w(z)$ als Lösung der Differentialgleichung
$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} - \frac{\varepsilon + \kappa^2}{z + \kappa} + \kappa\right) w(z) = 0, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$
Für welche ε und κ gibt es nichttriviale Lösungen w ?

Hinweis: einen Satz von Picard–Lindelöf beweist man in $\mathbb{C}$ praktisch genauso wie in $\mathbb{R}$.

2. Basierend auf der Definition der Laguerre–Funktionen
$$L_{n,\alpha}(t) := \frac{1}{n!} t^{-\alpha} e^t \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(e^{-t} t^{n+\alpha})$$
zeige man
$$L_{n,\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n!} \binom{n}{k} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} t^k,$$
für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $t > 0$, mit Γ als der Gamma–Funktion, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ für $s > 0$.

3. Für $\alpha > -1$, $x > 0$, $t \in \mathbb{C}$ mit $|t| < 1$ definieren wir Funktionen $c_{n,\alpha}(x)$ als Taylorkoeffizienten:
$$(1-t)^{-\alpha-1} e^{-xt/(1-t)} =: \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,\alpha}(x) t^n.$$
   (a) Stellen Sie die $c_{n,\alpha}$ als Kurvenintegral dar:
$$c_{n,\alpha}(x) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\Gamma ???\, \mathrm{d}t,$$
   mit geeignet zu wählendem Γ und Integranden, der x als Parameter enthält.

   (b) Substituieren Sie $t \mapsto u$ gemäß $u = x/(1-t)$ (die Kurve Γ muß natürlich mittransformiert werden).

   (c) Werten Sie das neue Integral aus (Residuensatz), und zeigen Sie, daß
$$c_{n,\alpha}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}u^n} e^{-u} u^{n+\alpha}\right)_{|u=x}.$$
   (d) Zeigen Sie damit, daß
$$(1-t)^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_{n,\alpha}(x) t^n, \qquad |t| < 1, \qquad x \in \mathbb{R}_+,$$
   gilt, und links steht gerade die sogenannte *erzeugende Funktion* der Laguerre-Polynome.

Auf diese Weise gewinnt man auch eine Integraldarstellung für Laguerre–Funktionen.