Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

10.06.2011

Übungen zur Funktionentheorie Blatt 5

Die Lösungen sind abzugeben am Donnerstag, 23.06.,
(bzw. wg. Feiertag je nach Vereinbarung mit den Übungsleitern) in den Briefkästen auf F4.
Gemeinsame Abgabe in Zweiterteams ist zulässig,
solange jede/r der Beteiligten jede Lösung gut präsentieren kann.

1. (a) Bestimmen Sie die Residuen der Gamma–Funktion in den Punkten $-n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.
   Hinweis: rekursiv

   (b) Sei $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, und sei $S_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \colon \arg z = \alpha\}$, angesehen als eine Kurve, die im Ursprung startet. Zeigen Sie, daß dann

   $$\Gamma_\alpha(z) := \int_{t \in S_\alpha} e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t, \qquad \Re z > 0,$$

   eine weitere Integraldarstellung der (früher definierten) Gamma–Funktion ergibt.

2. (a) Sei $D := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe, und sei $f \colon D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die auf D die Ungleichung $|f(z)|^2 \le 1 - |z|$ erfüllt. Zeigen Sie, daß dann $f \equiv 0$ ist.

   (b) Finden Sie alle analytischen Funktionen $f \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, für die überall folgende Ungleichung gilt:

   $$|f(z)| \le \sqrt{|z|} + \frac{1}{\sqrt{|z|}}.$$

3. Wir definieren eine Funktion $F = F(t,z) \colon (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

   $$F(t,z) := \exp\left(\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right).$$

   Die Koeffizienten der Laurent–Reihe von F bzgl. der komplexen Variablen t im Nullpunkt mögen $J_n(z)$ heißen:

   $$F(t,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n, \qquad z \in \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

   Zeigen Sie, daß für die somit definierten Funktionen J_n (mit $n \ge 0$) gilt:

   $$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \cos\Big(n\theta - z \sin\theta\Big) \, \mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

   Diese Funktionen J_n heißen *Besselfunktionen* und spielen eine wichtige Rolle bei Laplace–Gleichungen und Wellengleichungen mit zylindrischer Symmetrie, genauso wie die Laguerre–Polynome vom vorigen Blatt eine wichtige Rolle spielen bei der quantenmechanischen Beschreibung des Wasserstoffatoms.