Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

22.06.2011

Übungen zur Funktionentheorie. (Letztes) Blatt 6.

Die Lösungen sind abzugeben am Donnerstag, 07.07.,
(bzw. je nach Vereinbarung mit den Übungsleitern) in den Briefkästen auf F4.
Die Übungsgruppen zu diesem Blatt gibt es ausschließlich am 11. und 12. Juli.

1. Ermitteln Sie folgende Integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x \quad (0<\alpha<1), \qquad\qquad \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Denken Sie an ein geeignetes Rechteck, bzw. an eine Kreisscheibe, die entlang $\mathbb{R}_+$ aufgeschlitzt wurde.

2. Sei f eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion mit einer endlichen Polstellenmenge $P^{(f)}$, wobei alle Pole in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ liegen. Weiterhin sei $\{\Gamma_m \colon m\in\mathbb{N}_+\}$ eine Folge von stückweise glatten Schleifen, die den Nullpunkt im Gegenuhrzeigersinn jeweils einmal umlaufen, sodaß $\Gamma_m\cap(\mathbb{Z}\cup P^{(f)})=\emptyset$ und $\lim_{m\to\infty}\operatorname{dist}(\Gamma_m,\{0\})=\infty$. Wir setzen voraus, daß $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$ konvergiert, und daß

$$\lim_{m\to\infty}\oint_{\Gamma_m} f(z)\cot(\pi z)\,\mathrm{d}z = 0$$

gilt. Zeigen Sie, daß dann

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = -\pi \sum_{z_0\in P^{(f)}} \operatorname{Res}_{z=z_0}\Big\{f(z)\cot(\pi z)\Big\}.$$

Ermitteln Sie damit den Reihenwert

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(a+nb)^2}, \qquad \text{wobei}\quad a,b\in\mathbb{C},\quad b\neq 0,\quad \frac{a}{b}\notin\mathbb{Z}.$$

3. Für zwei auf $[0,\infty)$ stetige Funktionen f_1 und f_2 mit Werten in $\mathbb{C}$ führen wir deren Faltung $(f_1*f_2)\colon[0,\infty)\to\mathbb{C}$ ein gemäß

$$(f_1*f_2)(t) := \int_{\tau=0}^{t} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad 0\le t<\infty.$$

(a) Suchen und finden Sie eine Funktion y mit $(\sin *y)(t)=t\sin t$ für $t\in[0,\infty)$.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t)-(y*\cos)(t)=t^2, \qquad y(0)=1.$$

Hinweis: Laplace–Transformation

4. Zeigen Sie: wenn Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}$ ist, dann bildet die Menge derjenigen Funktionen, die auf Ω holomorph sind und auf dem Abschluß $\overline{\Omega}$ stetig, ausgestattet mit der Supremumsnorm, einen Banachraum.