

Übungen zur Modellierung Blatt 5

Diese Übungen werden behandelt vom 28. bis 30. Juni,
die Abgabe wäre entsprechend vorher (je nach Übungsleiter).

Eine Kurve Γ im \mathbb{R}^2 sei parametrisiert durch die Funktion

$$\gamma = \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b], \quad a < b.$$

Wir setzen voraus, daß die Funktionen $x = x(t)$ und $y = y(t)$ genügend oft stetig differenzierbar sind (z.B. dreimal), und daß überall $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$.

1. Welcher geometrisch unangenehme Effekt wird durch die Bedingung $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ verhindert ?
2. Wie lautet ein mathematisches Kriterium dafür, daß die Kurve sich selbst nicht schneidet ? Und ein Kriterium dafür, daß die Kurve sich schließt, und zwar ohne Knick ?
3. Begründen Sie, warum das folgende Integral tatsächlich als Kurvenlänge von Γ angesehen werden kann:

$$L := \int_{t=a}^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Hinweis: Annäherung des Integrals durch Riemannsummen

4. Wir definieren eine Funktion $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gemäß

$$g(t) := \int_{\tau=a}^t \sqrt{(x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2} d\tau.$$

Was ist die Bedeutung dieser Funktion g ?

5. Mit dieser Funktion g wählen wir eine zweite Parametrisierung von Γ :

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(s) := \begin{pmatrix} \tilde{x}(s) \\ \tilde{y}(s) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x(g^{-1}(s)) \\ y(g^{-1}(s)) \end{pmatrix}, \quad s \in [0, L].$$

Zeigen Sie, daß dann folgendes gilt für jedes $s \in [0, L]$:

$$(\tilde{x}'(s))^2 + (\tilde{y}'(s))^2 = 1.$$

Geben Sie eine Interpretation dieser Formel an.

6. Eine Punktmasse der Größe m bewegt sich entlang von Γ , hat dabei aber immer dieselbe Absolutgeschwindigkeit $|v|$. Wie kann die Bewegung dieser Punktmasse beschrieben werden ? Wie sieht in dieser Situation das Bewegungsgesetz von Newton aus (mit Interpretation der Formel) ? Begründen Sie die (z.B. durch Nachschlagen gefundene) Formel der Fliehkraft in einer Kurve.
7. Wie würden Sie die *durchschnittliche Beschleunigung* der in der vorigen Aufgabe genannten Punktmasse per Formel festlegen ?