Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

08.11.2010

Übungen zu Dynamischen Systemen
Blatt 2

1. Gegeben sei das Räuber–Beute–Modell
$$x' = (4 - y)x, \qquad y' = (x - 3)y,$$
für gesuchte Funktionen $x = x(t)$ und $y = y(t)$. Untersuchen Sie die Fixpunkte auf Stabilität, geben Sie eine Lösung an (z.B. durch Transformation auf eine exakte Differentialgleichung) und skizzieren Sie das Phasenporträt.

2. Man zeige an einem Beispiel, daß sich die Orbits von Lösungen einer nichtautonomen Differentialgleichung
$$x'(t) = f(t, x)$$
doch schneiden können (wenn f glatt ist).

3. Zeigen Sie: wenn
$$x'(t) \le \beta x(t) + f(t), \qquad \beta \in \mathbb{R}, \qquad x(0) = x_0,$$
für alle $t \in [0, T]$, dann $x(t) \le \exp(\beta t)x_0 + \int_{s=0}^{t} \exp(\beta(t - s)) f(s)\,\mathrm{d}s$.

4. Zeigen Sie: wenn $x = x(t)$ stetig ist mit nichtnegativen Werten und mit der Ungleichung
$$x(t) \le x_0 + \beta \int_{s=0}^{t} x(s)\,\mathrm{d}s, \qquad 0 \le t \le T, \qquad \beta \ge 0,$$
dann ist $x(t) \le x_0 \exp(\beta t)$ für $0 \le t \le T$.

   Was können Sie retten, wenn β negativ ist ?

5. Zeigen Sie: wenn $a = a(t; \gamma)$ ($\mathbb{R}^{n\times n}$–wertig und) stetig ist in beiden Variablen, dann hängt die Lösung $x = x(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems
$$x'(t) = a(t; \gamma)x(t), \qquad x(0) = x_0$$
stetig vom Parameter γ ab.