

Übungen zu Dynamischen Systemen Blatt 3

1. Betrachte das System

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2 \\x_2' &= -2x_1 - ax_2 - 3x_1^2,\end{aligned}$$

wobei $a > 0$. Man zeige:

- $(0, 0)^\top$ ist asymptotisch stabil, und $(-2/3, 0)^\top$ ist ein Sattelpunkt
- Die Energie im reibungsfreien Fall ($a = 0$) ist $V(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1^3$. Man zeichne einige Niveaulinien von V .
- Wenn $x_0 \in \mathbb{R}^2$ und $\gamma_+(x_0)$ beschränkt ist, dann enthält $\omega(x_0)$ einen der beiden Gleichgewichtspunkte. (Dazu verwende man Sätze aus der Vorlesung und überlege sich, wie sich V entlang eines Orbits verhält.)

Man skizziere das Phasenporträt für $a = 3$.

2. Für das ebene System

$$x_1' = x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad x_2' = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

sind Gleichgewichtspunkte und die ω -Limesmengen zu bestimmen. Falls Grenzyklen auftreten sollten, ist nach deren Stabilität gefragt.

Hinweis: Polarkoordinaten

3. Betrachte die Gleichung zweiter Ordnung $y''(t) + g(y(t)) = 0$, bzw. (mit $x_1 = y$ und $x_2 = y'$)

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -g(x_1).$$

- Zeige, daß $H = x_2^2/2 + G(x_1)$ ein Hamiltonian (also ein zeitlich konstanter Energiewert) ist, mit G als Stammfunktion zu g .
- Zeige, daß jeder periodische Orbit die x_1 -Achse in genau zwei Punkten a und b schneidet, mit $a < b$. *Hinweis:* Eindeutigkeitsprinzip
- Zeige mit Symmetrieargumenten, daß die Umlaufzeit gegeben ist durch

$$T = 2 \int_{u=a}^b \frac{du}{\sqrt{2(G(b) - G(u))}}.$$