Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher 20.02.09

MATHEMATIK FÜR PHYSIKER I, WS 08/09 KLAUSUR

NAME: .... MATRIKELNUMMER ....

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Bitte beachten Sie folgendes:

- Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf dieses Blatt.
- Schreiben Sie Ihren Namen auch auf **jedes** der folgenden Blätter.
- Lesen Sie die Aufgaben in Ruhe durch, ehe Sie anfangen sie zu lösen.
- Schreiben Sie Ihre Lösung auf dasselbe Blatt, auf dem die Aufgabe steht. Falls dies nicht ausreichen sollte, benutzen Sie das freie Blatt am Ende. Wenn auch das schon verbraucht sein sollte, verlangen Sie zusätzliche Blätter, die Sie dann wieder mit Ihrem Namen versehen.
- Ihre Lösungen müssen nicht nur richtig, sondern auch lesbar und nachvollziehbar sein. Meist sind die **Begründungen** entscheidend.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen: Stifte und ein beschriebenes oder bedrucktes Blatt A4. Keine Taschenrechner.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (6 Punkte): Die Orte Lindau und Konstanz sind 40 Kilometer (Luftlinie) entfernt. Durch die Erdkrümmung erhebt sich zwischen diesen Orten ein Wasserberg. Bestimmen Sie mit geeigneten Näherungsverfahren dessen Höhe in Metern (schriftliches Rechnen oder im Kopf, Erdradius = 6400 km).

Aufgabe 2 (6 Punkte): Im $\mathbb{R}^n$ (mit $n \geq 2008$) seien linear unabhängige Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ gegeben.

1. Schreiben Sie den Rechenverlauf des Gram-Schmidt-Verfahrens in dieser Situation hin.

2. Begründen Sie, warum das Gram-Schmidt-Verfahren nicht zu einer Division durch Null führt.

3. Zeigen Sie, daß die drei Ergebnisvektoren orthonormal und linear unabhängig sind, und daß sie denselben Unterraum des $\mathbb{R}^n$ aufspannen wie die Ausgangsvektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$.

Aufgabe 3 (6 Punkte): Definieren Sie folgende Begriffe: lineare Unabhängigkeit im allgemeinen Vektorraum; gleichmäßige Konvergenz einer Reihe; Gruppe; normierter Raum.

Beschreiben Sie das Newtonverfahren und geben Sie an, was quadratische Konvergenz ist.

Denkaufgabe 4 (6 Punkte):

1. Man bestimme den Wert von $(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{2})^{337}$, wobei $\mathrm{i}^2 = -1$.
2. Für die Funktionen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ gebe man die Potenzreihen im Nullpunkt an. Wo konvergieren diese Reihen ?
3. Man bestimme den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin(x)}{x-\sin(x)}$.

Aufgabe 5 (6 Punkte):

1. Geben Sie die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus an.
2. Leiten Sie das Additionstheorem für den Tangens her.
3. Beschreiben Sie kurz, wie man das Additionstheorem für den Sinus beweisen kann.

Aufgabe 6 (6 Punkte):

1. Das Skalarprodukt im $\mathbb{C}^n$ ist $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}$. Welchem Zweck dient der Konjugationsstrich ?
2. Zeigen Sie, daß eine Folge im $\mathbb{R}^3$ nicht 2 verschiedene Grenzwerte haben kann.
3. Welche wichtige Schlußfolgerung haben wir aus dem Austauschsatz von Steinitz gezogen ?
4. Zeigen Sie, daß der Kern einer linearen Abbildung $f\colon U \to V$ tatsächlich ein Untervektorraum von U ist.
5. Wie sieht das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ im Komplexen aus (mit Begründung) ?
6. Warum ist eine injektive lineare Abbildung vom $\mathbb{R}^7$ in den $\mathbb{R}^7$ auch surjektiv ?