Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher
21.10.2011

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 1

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 28.10.2011, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Seien $p, q \in \mathbb{R}$, die Zahl $D = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$ sei positiv, und sei $w = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}$, wobei der Radikand als nichtnegativ vorausgesetzt wird. Man zeige, daß $x := w - \frac{p}{3w}$ eine Lösung der kubischen Gleichung $x^3 + px + q = 0$ ist.

   Arbeiten Sie ökonomisch. Mit Riesenaufwand kann's ja jeder.

   Gegeben sei eine kubische Gleichung $y^3 + ay^2 + by + c = 0$ mit reellen a, b, c und gesuchtem y. Wie kann man diese Gleichung transformieren auf eine kubische Gleichung der Gestalt $x^3 + px + q = 0$, also ohne quadratischen Term ?

2. (a) Man zeige durch Nachrechnen, daß für alle komplexen Zahlen r, w, z die folgenden Beziehungen gelten:

   $$(r \cdot w) \cdot z = r \cdot (w \cdot z),$$
   $$|r \cdot w| = |r| \cdot |w|.$$

   (b) Zeigen Sie anschließend die Dreiecksungleichung $|z + w| \leq |z| + |w|$, sowie die „Dreiecksungleichung nach unten“:

   $$|z - w| \geq \Big| |z| - |w| \Big|.$$

   Arbeiten Sie ökonomisch.

3. Zeigen Sie: egal wie man es auch versucht, es wird nie gelingen, auf $\mathbb{C}$ eine Ordnungsrelation $\leq$ einzuführen, die sich mit den Rechenoperationen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{C}$ verträgt.

   Im Sinne von: wenn $a \leq b$, dann $a + c \leq b + c$. Und wenn $0 \leq c$ sowie $a \leq b$, dann $ac \leq bc$. Das Ganze soll gelten für alle $a, b, c \in \mathbb{C}$.

4. Es seien $z, w \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie die sogenannte *Parallelogrammgleichung* und zeichnen Sie eine Skizze:
   $$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Beweisen Sie, daß für beliebige komplexe Zahlen z und w gilt:

   $$|1 - z\overline{w}|^2 - |z - w|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2).$$

Hinweis zu den Aufgaben 2(b), 4 und 5: Es ist am besten, wenn Sie bei diesen Aufgaben die komplexen Zahlen als solche verwenden, und nicht alles nach Real– und Imaginärteil aufdröseln. Die Relation $r \cdot \overline{r} = |r|^2$ für $r \in \mathbb{C}$ könnte zum Beispiel nützlich sein.

Aufgaben zum Selberkorrigieren bzw. Gegenseitigkorrigieren

6. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar:

$$(2+3\mathrm{i})(1-\mathrm{i}), \qquad (-\mathrm{i})^2, \qquad \tfrac{\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-1}, \qquad \left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3, \qquad \left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3.$$

Antwort: $5+\mathrm{i}$, -1, $\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{i}$, 1, 1.

7. Vervollständigen Sie die Gleichungen nach dem Schema „kartesische Form"=„Polarkoordinatenform":

$$\begin{aligned}
\mathrm{i} &= 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right),\\
1+\mathrm{i} &= \\
-3+3\mathrm{i} &= \\
&= 2\cdot(\cos 5\pi + \mathrm{i}\sin 5\pi)\\
-1-\sqrt{3}\mathrm{i} &= \\
&= 2\cdot(\cos(-\pi) + \mathrm{i}\sin(-\pi))
\end{aligned}$$

8. Stellen Sie in der Form $a + b\mathrm{i}$ dar (ohne Taschenrechner):

$$\frac{(1+2\mathrm{i})^2}{2+3\mathrm{i}}, \quad \frac{1+2\mathrm{i}}{(2+3\mathrm{i})^2}, \quad \left(\frac{4-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}\right)^2, \quad (1+\mathrm{i})^{246}.$$