Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

28.10.2011

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 2

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 04.11.2011, VOR Beginn der Vorlesung.

Jede der Aufgaben 2,4,5 läßt sich in wenigen Zeilen lösen.

1. (a) Der Einheitskreis (also die Kreislinie) in der komplexen Zahlenebene sei mit S^1 bezeichnet. Zeigen Sie: wenn $z \in S^1$, dann ist $z^{-1} = \overline{z}$. Wenn $z, w \in S^1$, dann ist auch $z \cdot w \in S^1$ und $z/w \in S^1$.

   (b) Finden Sie alle Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = 1$; und zeichnen Sie diese in der komplexen Zahlenebene. Analog für die Gleichungen $z^4 = 1$, $z^5 = 1$ und $z^3 = -1$.

   (c) Stellen Sie in der Form $a + bi$ dar:

$$\frac{1}{\mathrm{i}}, \quad \frac{1}{1+\mathrm{i}}, \quad \frac{1}{1-\mathrm{i}}, \quad \mathrm{i}^k, \quad \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Wir nennen zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ *gleichorientiert ähnlich*, wenn die Eckpunkte A, B, C und A', B', C' den gleichen Umlaufsinn haben und wenn die entsprechenden Innenwinkel übereinstimmen (also der Winkel bei A ist gleich dem Winkel bei A' usw).

   Man zeige: Sind ALT, ARM, ORT, ULM vier gleichorientiert ähnliche Dreiecke der Ebene, (wobei A, L, M, R, T, O, U paarweise verschiedene Punkte sind), dann ist A der Mittelpunkt der Strecke $\overline{OU}$.

   Hinweis: Multiplikation komplexer Zahlen

3. Sei $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ die Schreibweise für einen allgemeinen Punkt in der Ebene. Man beweise, daß die Ausdrücke

$$\|x\|_1 := |x_1| + |x_2|, \qquad \|x\|_\infty := \max\Big(|x_1|, |x_2|\Big)$$

   Normen für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ sind (also daß sie die in Satz 1.30 genannten Eigenschaften besitzen). Skizzieren sie die beiden Mengen in der Ebene, für die $\|x\|_1 \leq 1$ bzw. $\|x\|_\infty \leq 1$.

4. Seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte in der Ebene. Man zeige, daß

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \geq |AC| \cdot |BD|.$$

   Hinweis: die alten Griechen konnten sogar noch einiges mehr zeigen: das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn die 4 Punkte auf einer Geraden oder einer Kreislinie liegen. Soweit wollen wir hier aber nicht gehen, damit es ein Dreizeiler bleibt.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ gegeben, mit $|z_0| < 1$. Wir definieren eine Funktion

$$w = w(z) = \frac{z - z_0}{z\overline{z_0} - 1}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z\overline{z_0} \neq 1.$$

   Zeigen Sie: $|z| < 1 \iff |w(z)| < 1$. Was bewirkt die Abbildung $z \mapsto w(z)$ (geometrisch formuliert) ?

   Hinweis: Zeigen Sie zuerst $|z\overline{z_0} - 1|^2 - |z - z_0|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |\overline{z_0}|^2)$. Das müßten Sie kennen.

Aufgaben zum Selberkorrigieren

6. Man stelle folgende Zahlen in trigonometrischer Form und in kartesischer Form dar:

$$\begin{aligned}
&(1-\mathrm{i})^6,\\
&e^{3\pi\mathrm{i}},\\
&\left(2-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3,\\
&\left(\mathrm{i}-\sqrt{3}\right)^8,\\
&\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\mathrm{i}\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^3,\\
&\left(\frac{3}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6,\\
&e^{3+\mathrm{i}\frac{\pi}{3}},\\
&(1-\mathrm{i})^{13}.
\end{aligned}$$

Antworten:

$8(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}) = 8\mathrm{i}$, -1, $-10-9\sqrt{3}\mathrm{i} \approx 18.52(\cos 237.32^\circ + \mathrm{i}\sin 237.32^\circ)$, $-128+128\sqrt{3}\mathrm{i}$, $-4\sqrt{2}(1+\mathrm{i}) = 8(\cos\frac{5}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{5}{4}\pi)$, -27, $\frac{1}{2}e^3(1+\mathrm{i}\sqrt{3})$, $64(\mathrm{i}-1)$