Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

04.11.2011

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 3

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 11.11.2011, VOR Beginn der Vorlesung.

Für manch eine dieser Aufgaben müßten Sie eventuell im Skript vor-lesen.

1. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt bekanntlich $|\sin x| \leq 1$ sowie $|\cos x| \leq 1$ und $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ sowie $1 - \cos(x) = 2\sin^2(x/2)$.

   Welche dieser Beziehungen bleiben gültig, wenn man $x \in \mathbb{R}$ ersetzt durch $z \in \mathbb{C}$? (Entscheidend für die Bewertung Ihrer Lösungen ist die Vollständigkeit der Begründungen.)

2. (a) Gegeben sei ein regelmäßiges Fünfeck (alle Kanten gleichlang, alle Winkel gleichgroß). Wieviele Elemente hat die Gruppe der Abbildungen, die dieses Fünfeck auf sich abbilden (Operation $\circ$ in dieser Gruppe ist die Nacheinanderausführung) ? Wieviele Elemente hat die Gruppe der orientierungserhaltenden Abbildungen dieses Fünfecks auf sich ?

   (b) Wieviele Elemente hat die Gruppe der Abbildungen, die einen Würfel auf sich abbilden ?

   (c) Man finde alle Gruppen mit 3 Elementen, und alle Gruppen mit 4 Elementen. (Es reicht, jeweils die Verknüpfungstafel anzugeben. Das Assoziativgesetz braucht nicht nachgewiesen werden.) Für jede dieser Gruppen finde man eine geometrische Interpretation wie in Teil (a) und Teil (b).

3. Wir schauen uns Spiegelungen im $\mathbb{R}^2$ an.

   (a) Gesucht ist die Abbildungsmatrix für die Spiegelung an der Gerade $x_1 + x_2 = 0$.

   (b) Welche Bewegung erhalten Sie, wenn Sie nach der Spiegelung aus (a) zusätzlich noch eine Spiegelung an der Gerade $x_1 = 0$ durchführen ? Was ist die zugehörige Abbildungsmatrix dieser zweiten Spiegelung bzw. der zusammengesetzten Abbildung ? Welcher Zusammenhang fällt Ihnen auf ? *Hinweis:* Merkregel benutzen.

4. Wir bezeichnen mit $\mathbb{P}$ die Menge aller Matrizen der Gestalt

   $$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

   wobei a und b beliebige reelle Zahlen sind. Auf der Menge $\mathbb{P}$ sind eine Addition und eine Multiplikation so definiert, wie es für Matrizen üblich ist. Zeigen Sie:

   (a) Addition und Multiplikation führen aus $\mathbb{P}$ nicht heraus.

   (b) Für beide Operationen gelten Assoziativgesetze, Kommutativgesetze und das Distributivgesetz.

   (c) Für beide Operationen gibt es je genau ein neutrales Element in $\mathbb{P}$.

   (d) Für jedes Element aus $\mathbb{P}$ gibt es genau ein additiv inverses Element, und für jedes Element (ungleich dem neutralen Element zur Addition) gibt es genau ein multiplikativ inverses Element.

   Woher kennen Sie das, was Sie hier veranstalten ?

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Man beweise Satz 1.44 aus dem Skript (siehe Homepage).

   Hinweise: Sei e *ein* linksneutrales Element. Sei a beliebig, a' *ein* linksinverses Element zu a, und a'' *ein* linksinverses Element zu a'. Dann ist also $a = e \circ a$. Man forme dies solange um, bis $a = a \circ e$ entsteht. Weil a beliebig war, ist e also auch rechtsneutral. Als nächstes zeige man, daß es nur ein einziges neutrales Element geben kann. Zeige als nächstes $a'' = a$, womit a' auch rechtsinvers zu a ist. Zeige die Eindeutigkeit des inversen Elements zu a zum Schluß.

Aufgaben zum Selberkorrigieren bzw. Gegenseitigkorrigieren

6. Wir betrachten die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie die Produkte $(AB)C$, $A(BC)$, sowie die Ausdrücke $(AB)^\top$ und $B^\top A^\top$.

7. Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   bestimme man die Matrix $A^3 - 18A = A \cdot A \cdot A - 18 \cdot A$.

   Antwort: 0