Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher 11.11.2011

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 4

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 11.18.2011, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C und Seitenlängen a, b, c, wobei A der Kante a gegenüberliegt usw. Unter der Seitenhalbierenden s_a verstehen wir diejenige Strecke, die den Mittelpunkt der Seite a mit der gegenüberliegenden Ecke A verbindet. Analog definieren wir s_b und s_c.

   (a) Man gebe eine Formel an, wie man die Länge von s_a aus den Längen von a, b und c ermitteln kann.
   Hinweis: Suchen Sie Parallelogramme.

   (b) Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden sei S. Man zeige: Es ist $\overrightarrow{AS} \perp \overrightarrow{BS}$ genau dann, wenn $a^2 + b^2 = 5c^2$.
   Hinweise: Der Punkt S ist gleich dem Massenschwerpunkt der Punkte A, B, C. Daraus bestimme man, in welchem Verhältnis der Punkt S die Seitenhalbierenden teilt.

2. Für das Kreuzprodukt zeige man den Entwicklungssatz und die Identität von Lagrange.

3. Sei $ABCDEF$ ein Sechseck in der Ebene. Jeweils drei benachbarte Ecken bilden ein Dreieck; von diesen Dreiecken gibt es 6 Stück. Von jedem dieser Dreiecke bilden wir den Massenschwerpunkt der Ecken. Man zeige, daß diese 6 Massenschwerpunkte ein Sechseck bilden, bei dem gegenüberliegende Kanten gleichlang und parallel sind.

4. (a) Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC. Auf jeder Kante errichten wir je einen Vektor senkrecht nach außen, dessen Länge proportional zu der Länge der jeweiligen Kante ist. Man bestimme die Summe dieser 3 Vektoren.
   Hinweis: Rechnen.

   (b) Gegeben sei ein Tetraeder $ABCD$, also eine dreiseitige Pyramide im Raum. Diese darf beliebig unregelmäßig sein. Auf jeder der 4 Flächen errichten wir je einen Vektor, der auf der jeweiligen Fläche senkrecht steht, nach außen zeigt, und dessen Länge proportional ist zum Flächeninhalt der zugehörigen Dreiecksfläche. Man bestimme die Summe dieser 4 Vektoren.
   Hinweis: Rechnen.

   (c) Gegeben sei ein schiefes Prisma $A_1 A_2 \dots A_{168}$ mit einer 84–eckigen Grundfläche, die unregelmäßig sein kann. Auf jeder der 86 Flächen errichten wir senkrechte Vektoren wie in (b). Man bestimme die Summe dieser 86 Vektoren.
   Hinweis: Die Vermutung liegt nahe, hier nicht zu rechnen.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Sei A eine Matrix vom Format 3×3. Zeigen Sie:

   Wenn $Ax = 0$ für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^3$, dann muß A die Nullmatrix sein.

Aufgabe zum Selberkorrigieren

6. Gegeben seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Man berechne:

(a) $\|a\|$, $\|b\|$, $\|c\|$,

(b) $\langle a, b\rangle$, $\langle b, c\rangle$, $\langle a, c\rangle$,

(c) $a \times c$, $b \times c$, $\langle a \times b, c\rangle$,

(d) $a \times (b \times c)$, $(a \times b) \times c$,

(e) das Spatprodukt $[a, b, c]$.

Lösungen:

(a) $\sqrt{6}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$,

(b) 2, 0, 0,

(c) $(2, 2, 2)^T$, $(0, 2, 0)^T$, -4,

(d) $(-2, 0, 2)^T$, $(0, 0, 0)^T$,

(e) -4.