Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

18.11.2011

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 5

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 25.11.2011, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Man beweise:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \exists c, d \in \mathbb{R} \quad : \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad a \cos x + b \sin x = c \sin(x + d)$$

Hinweis: Gesucht ist ein Rechenverfahren, wie man c und d ermitteln kann, wenn a und b gegeben sind. Dabei sollen c und d *so* beschaffen sein, daß die Gleichung $a \cos x + \dots$ für sämtliche x gilt.

Achtung: die Aufgabe hat es in sich ! Machen Sie unbedingt mehrere Proben, nicht bloß eine.

2. (a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Bildpunktes von $(3, 3, 3)^\top$ bei Drehung um die Achse durch den Ursprung mit Richtungsvektor $(2, 0, 1)^\top$ um den Winkel 30°.

   (b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Bildpunktes von $(2, 2, 2)^\top$ bei Drehung um die Achse durch die Punkte $(1, -1, 3)^\top$, $(1, 0, 5)^\top$ um den Winkel 30°.

3. Seien A, B, C beliebige Mengen. Beweisen Sie folgende Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C), \\ A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C), \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

4. Für ein Dreieck ABC gibt es bekanntlich genau einen *Umkreis*, also einen Kreis, der durch die drei Ecken verläuft. Sein Mittelpunkt heiße O. Die drei Höhen durch die Ecken A, B, C mögen h_a, h_b, h_c heißen. Der Schwerpunkt (Massenmittelpunkt der drei Ecken) heiße S. Dies ist auch der gemeinsame Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden.

   (a) Stellen Sie Geradengleichungen für h_a, h_b, h_c auf, und beweisen Sie, daß diese drei Höhen einander in einem selben Punkt schneiden. Dieser Punkt heiße H.

   (b) Beweisen Sie, daß H, S, O auf einer Geraden liegen, und daß S die Strecke HO im Verhältnis $2 : 1$ teilt (merkbar in der „chemischen“ Formel $3S = H + 2O$).

Hinweis: versuchen Sie, elegant zu arbeiten. Vektorrechnung ist natürlich möglich, aber wüste Koordinatenrechenschlachten sind trotzdem nicht das Aufgabenziel.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, daß

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},$$

   für jedes $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Aufgabe zum Selberkorrigieren

6. Zeigen Sie, daß
$$\sum_{k=0}^{n} (2k+2)^2 = \frac{2(n+1)}{3}(n+2)(2n+3), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Stolperfallentext beachten.