Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

25.11.2011

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 6

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 02.12.2011, VOR Beginn der Vorlesung.

1. (a) Welche der folgenden Mengen von Vektoren des $\mathbb{R}^4$ sind linear abhängig ?

$$\{(27,0,0,0),(2,0,0,2),(-3,0,0,7)\}, \qquad (1)$$
$$\{(12,34,56,1),(47,11,189,4),(2008,1,0,0)\}. \qquad (2)$$

(b) Zeigen Sie, daß die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 4-3\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem des $\mathbb{C}$–Vektorraumes $\mathbb{C}^2$ bilden.

(c) Man untersuche, ob die Funktionen $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(2x)$, $x \mapsto \cos(3x)$ linear unabhängig sind.

2. (a) Zeigen Sie (z.B. mittels vollständiger Induktion) für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, daß

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

(b) Zeigen Sie (mittels (a)) für jedes $n \in \mathbb{N}_+$, daß für gewisse Binomialkoeffizienten folgende Näherungsformel gilt:

$$\frac{4^n}{n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}.$$

3. (a) Für natürliche Zahlen n sei $s_n := \sum_{j=1}^{2^n-1} j^{-1}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, daß für jedes $n \geq 2$ gilt:

$$\frac{n}{2} < s_n < n.$$

(b) Der Nikolaus hat ein wenig zu tief ins Glühweinglas geschaut: „Alle Christstollen enthalten gleich viele Rosinen !“ verkündet er polternd, „oder, um es präzise zu sagen: für jede natürliche Zahl n enthalten je n Christstollen dieselbe Anzahl von Rosinen, jawoll ! Das kann ich sogar beweisen. Durch Induktion !“ - und er hebt mit etwas schwerer Zunge an:

„Für $n = 1$ wird wohl niemand meine Behauptung bestreiten wollen; sie werde jetzt für je n Christstollen als richtig vorausgesetzt.“ Der Nikolaus holt tief Luft und fährt sodann fort: „Und nun zum Induktionsschluß ! Es seien also $n+1$ Stollen gegeben; wir numerieren sie in irgendeiner Weise mit den Zahlen $1, \ldots, n+1$. Dann haben nach Induktionsvoraussetzung sowohl die ersten n Stollen für sich als auch die letzten n Stollen für sich jeweils dieselbe Anzahl von Rosinen, insbesondere enthält Stollen Nr. $n+1$ genauso viele Rosinen wie Stollen Nr. 1: also haben - da ja auch die Stollen bis zur Nr. n so viele Rosinen wie Nr. 1 enthalten - alle $n+1$ Stollen dieselbe Rosinenzahl !“. — Hat er recht ?

4. Sei n eine positive ganze Zahl. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, daß die Funktion $x \mapsto \cos(n \arccos x)$ ein Polynom in x vom Grade n ist, mit höchstem Koeffizienten 2^{n-1}. Was ist der Definitionsbereich dieser Funktion ? Geben Sie die Nullstellen dieser Funktion an, und machen Sie eine Skizze der Lage der Nullstellen für große n.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe (zum Staunen und Begründenüben)*

Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Wir suchen Punkte F im Inneren des Dreiecks, für die die Streckenlängensumme $\Sigma := \overline{FA} + \overline{FB} + \overline{FC}$ so klein wie möglich wird. Punkte dieser Art nennt man *Fermat–Punkte*.

(a) überlegen Sie sich ein Experiment, wie man ein solches F mittels Seifenhäuten finden könnte.

(b) Auf den Kanten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ errichten wir nach außen gleichseitige Dreiecke ABC', BCA' und CAB'. Zeigen Sie: wenn X ein beliebiger Punkt im Inneren des Dreiecks ABC ist, dann ist $\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC} \geq \overline{AA'}$ und auch $\geq \overline{BB'}$ sowie $\geq \overline{CC'}$.
Hinweis: suchen Sie Drehungen um $60°$.

(c) Beweisen Sie für jedes X im Inneren des Dreiecks: wenn $\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC} = \overline{AA'}$, dann sieht man jede Kante des Dreiecks ABC vom Punkt X aus unter einem Winkel von $120°$.

(d) Beweisen Sie die Umkehrung der letzten Aussage.

(e) Die Umkreise der Dreiecke ABC' und CBA' schneiden einander in zwei Punkten, von denen einer gleich B ist. Zeigen Sie: jede Kante des Dreiecks ABC sieht man vom anderen Schnittpunkt aus unter einem Winkel von $120°$.
Hinweis: informieren Sie sich über Sehnenvierecke.

(f) Zeigen Sie damit, daß es einen Fermat–Punkt F wirklich gibt.

(g) Beweisen Sie: die drei Strecken $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ sind alle gleich lang, sie schneiden einander im selben Punkt, und die drei Umkreise der Dreiecke ABC', BCA' und CAB' gehen auch durch diesen Punkt.

(h) (Staunen)

(i) Wie ändert sich die Situation, wenn das Dreieck ABC stumpfwinklig wird, wobei der stumpfe Winkel größer wird als $120°$?