Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

29.11.2011

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 7

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 09.12.2011, VOR Beginn der Vorlesung.

1. Sei $V = C([-1,1] \to \mathbb{R})$ der Vektorraum derjenigen Funktionen, die auf $[-1,1]$ definiert sind, reelle Werte haben und auf $[-1,1]$ stetig sind. Wir definieren eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ durch
$$\langle f,g\rangle := \int_{x=-1}^{x=1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{für } f,g \in C([-1,1] \to \mathbb{R}).$$
Man beweise, daß $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt ist. *Hinweis:* Das heißt, daß die Bedingungen aus Definition 2.22 zu zeigen sind.

2. Mit den Bezeichnungen wie in Vorlesung und Skript ist für das Gram–Schmidt–Verfahren zu zeigen: es ist kein $w_{n+1} = \vec{0}$, es ist $\langle u_{n+1}, u_k\rangle = 0$ sobald $1 \le k \le n$, und tatsächlich bilden die Vektoren $(u_1, u_2, \dots)$ ein Orthonormalsystem, das denselben Raum aufspannt wie die Ausgangsvektoren $(v_1, v_2, \dots)$.

3. (a) Die Funktion $x \mapsto \exp(\frac{1}{10}x)$ ist auf dem Intervall $[0,1]$ mit den Methoden aus Abschnitt 2.3.2 bestmöglich durch eine lineare Funktion $x \mapsto ax + b$ anzunähern. Der Approximationsfehler ist anzugeben.
   (b) Die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ soll auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$ mit den Methoden aus Abschnitt 2.3.4 bestmöglich durch eine Funktion der Form $x \mapsto \sum_{j=0}^{4} \lambda_j \cos(jx)$ angenähert werden. Der Approximationsfehler ist anzugeben. *Hinweis:* Bevor Sie das Gram–Schmidt–Verfahren auf die Familie $(\cos(0x), \cos(x), \dots, \cos(4x))$ loslassen, prüfen Sie zuerst, ob diese Funktionen schon ein Orthonormalsystem bilden. Formeln aus dem Bronstein können mit Quellenangabe verwendet werden.

4. Es sei $R \subset \mathbb{R}^4$ diejenige zweidimensionale affine Ebene, die durch die Punkte $(4,0,0,0)^\top$, $(0,3,0,0)^\top$ und $(0,0,0,1)^\top$ verläuft. Wie weit ist R vom Punkt $(78,4,5,7)^\top$ entfernt ? Benutzen Sie dabei die Methoden aus Abschnitt 2.3.2. Warum kann die Methode der Hesse–Normalform (evtl. aus dem Schulunterricht bekannt) nicht angewandt werden ?
Hinweis: Prüfen Sie zunächst, ob R ein Untervektorraum ist.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Es seien $t \in \mathbb{R}$ und $x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ die Variablen für Zeit und Ort, und weiterhin definieren wir (für skalare Felder φ und Vektorfelder $\vec{u}$) die in der Physik üblichen Differentialoperatoren
$$\nabla\varphi(x) := \left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_3}\right)^\top, \quad \triangle\varphi(x) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_j^2}, \quad \operatorname{div}\vec{u}(x) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_j}.$$
   Wenn eine Funktion $v = v(t,x)$ der Differentialgleichung $\frac{\partial^2}{\partial t^2}v - c^2 \triangle v = 0$ gehorcht, dann beschreibt diese Funktion v die Auslenkungen einer Welle, und diese Welle hat die Ausbreitungsgeschwindigkeit c (das braucht (und kann) nicht bewiesen werden).

   Sei nun $\vec{u} = \vec{u}(t,x)$ das Verschiebungsvektorfeld zu einem elastischen Festkörper mit Materialdichte ϱ, Kompressionsmodul K und Schermodul G. Dann gilt die Differentialgleichung
$$\varrho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} - G \triangle \vec{u} - \left(K + \frac{G}{3}\right)\nabla \operatorname{div}\vec{u} = 0.$$
   Bestimmen Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit des divergenzfreien Anteils von $\vec{u}$, und die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Potentialanteils von $\vec{u}$.
   Hinweis: Man kann vertauschen: ∇ mit $\triangle$, sowie div mit $\triangle$, aber nicht ∇ und div.
   Hinweis: Bestimmen Sie von der linken Seite den divergenzfreien Anteil und den Potentialanteil. Benutzen Sie die Darstellung des $L^2(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$ als direkte Summe zweier Untervektorräume.

Aufgabe zum Gegenseitigkorrigieren

6. Wenden Sie das Gram–Schmidt–Verfahren auf die Vektoren $f_1 = (2,1,0,3)^\top$, $f_2 = (0,1,0,4)^\top$, $f_3 = (1,1,1,1)^\top$ des $\mathbb{R}^4$ an.