Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

16.12.2011

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 9

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 13.01.2012, vor Beginn der Vorlesung.

1. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ -2\lambda x_1 + 9x_2 + \lambda x_3 &= 6, \\ 2x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

   (a) Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar ?
   (b) Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren unendlich viele Lösungen ?
   (c) Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren keine Lösungen ?

2. Man bestimme die Dimensionen von Kern und Bild der untigen Matrizen, und man gebe für Kern und Bild entsprechende Basen an.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 & -6 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Für das folgende Gleichungssystem bestimme man den Rang der Koeffizientenmatrix A und den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$. Daraus urteile man über die Lösbarkeit des Gleichungssystems. Wieviele (geeignet zu selektierende) Unbekannte können frei gewählt werden ?

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + 17x_3 + 8x_4 &= -20, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 7x_4 &= -4, \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 5x_4 &= -8, \\ -x_3 + 2x_4 &= 4. \end{aligned}$$

4. **(Fredholmsche Alternative ganz einfach)**

   Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine beliebige Matrix, und seien $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ sowie $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ die üblichen Skalarprodukte im $\mathbb{R}^n$ bzw. im $\mathbb{R}^m$.

   (a) Von welchem Vektorraum in welchen Vektorraum bilden A bzw. $A^\top$ ab ?
   (b) Was bedeuten die Dimensionsformeln für diese beiden Abbildungen ? Was können Sie über die Ränge von A und $A^\top$ aussagen ?
   (c) Beweisen Sie: wenn $x \in \mathbb{R}^m$ eine Lösung für das System $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ ist, dann ist $\left\langle A^\top y, x \right\rangle_m = \langle y, b \rangle_n$ für jeden Vektor $y \in \mathbb{R}^n$.
   (d) Beweisen Sie damit: $\ker A^\top \perp \operatorname{img} A$ und $\ker A \perp \operatorname{img} A^\top$. Das bedeutet: jeder Vektor aus dem linken Vektorraum steht senkrecht auf jedem Vektor aus dem rechten Vektorraum.
   (e) Schreiben Sie die Dimensionsformel für Untervektorräume geeignet oft hin.
   (f) Beweisen Sie damit: $\mathbb{R}^m = \ker A \oplus \operatorname{img} A^\top$ und $\mathbb{R}^n = \ker A^\top \oplus \operatorname{img} A$. Die Summanden stehen sogar aufeinander senkrecht.
   (g) Beweisen Sie die und erquicken Sie sich an der Alternative von Fredholm:
   Das System $Ax = b$ ist lösbar genau dann, wenn $b \perp \ker A^\top$.
   (h) Was bedeutet das für $n = m$ und reguläre (also invertierbare) Matrix A ?

Anmerkung: So richtig interessant wird es, wenn man den $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ durch Funktionenvektorräume ersetzt und für A einen Differentialoperator verwendet.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Wir parkettieren die Ebene auf periodische Weise mit gleichseitigen Dreiecken, die alle die gleiche Kantenlänge $L = 1$ haben.

   (a) Geben Sie zwei Basisvektoren $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ des $\mathbb{R}^2$ an, die jeweils auf einer Dreieckskante verlaufen.

   (b) Bestimmen Sie die Vektoren der dazugehörigen dualen Basis $(\vec{b}^1, \vec{b}^2)$.

   (c) Bestimmen Sie die Längen aller vier Basisvektoren. Was fällt auf ?

   (d) Entwickeln Sie rechenaufwandsarm den Vektor $\vec{x} = (24, 12)^\top$ bezüglich der Basis $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ und bezüglich der Basis $(\vec{b}^1, \vec{b}^2)$.

Aufgabe zum Gegenseitigkorrigieren

6. Man bestimme die Lösungen $y = y(x)$ der Anfangswertprobleme

$$
\begin{aligned}
y''(x) + 16y(x) &= \sin(2x), & y(0) &= 0, & y'(0) &= 1,\\
y''(x) + 2y'(x) + 17y(x) &= \cos(x), & y(0) &= 0, & y'(0) &= 0,\\
y''(x) + 2y'(x) + 10y(x) &= x, & y(0) &= 0, & y'(0) &= 0,\\
y''(x) - 4y(x) &= x, & y(0) &= 1, & y'(0) &= 0,
\end{aligned}
$$

   Um eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems zu bestimmen, probiere man mit einer Funktion $y^* = y^*(x)$, die so ähnlich aussieht wie die rechte Seite.