Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

13.01.2012

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 10

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 20.01.2012, vor Beginn der Vorlesung.

1. Welche der folgenden Reihen konvergieren (mit Begründung) ?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-3}{7n^4+1}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^{3n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^3 3^{-n}.$$

2. Man berechne die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n+n^2}$

   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$

   (c) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n}$

   (d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$

   Entscheidend sind die Begründungen.

3. Im Folgenden seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen komplexer Zahlen. Eine Folge heißt Nullfolge, wenn sie nach 0 konvergiert. Beweisen oder widerlegen Sie jede der folgenden Aussagen:

   (a) wenn $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

   (b) wenn $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, dann auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

   (c) wenn $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, dann ist eine der beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Nullfolge,

   (d) wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, dann ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

4. Sei $\gamma \in \mathbb{R}$ ein positiver Parameter. Wir definieren eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\geq 1}$ durch $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{\gamma}{a_n})$.

   (a) Setzen Sie $\gamma = 16$, $\gamma = 2$, $\gamma = 80$, und bestimmen Sie jedesmal einige Folgenglieder a_n mit dem Taschenrechner.

   (b) Staunen Sie über die schön schnelle Konvergenz.

   (c) Erraten Sie einen Kandidaten für den Grenzwert $g = \lim_{n\to\infty} a_n$, gestützt auf Ihre Rechnungen. (Rechnen Sie notfalls bis zum a_7 oder a_8.)

   (d) Beweisen Sie folgende Aussage: „*Wenn* die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ überhaupt einen Grenzwert hat, dann muß dieser Grenzwert gleich [Kandidaten hier einsetzen] sein“.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   In Aufgabe 4 haben wir noch nicht gezeigt, *daß* es überhaupt einen Grenzwert gibt. Das holen wir nach mit folgenden zwei Schritten:

   (a) Zeigen Sie $a_n \geq g$ für $n \geq 2$, wobei g Ihr Limeskandidat ist.

   Hinweis: eine Ungleichung der Form $(p-q)^2 \geq 0$ könnte ein guter Start sein.

   (b) Zeigen Sie anschließend $a_{n+1} \leq a_n$ für $n \geq 2$.

Die Klausur wird am 24.02.12 stattfinden, von 11:00-13:00 Uhr im Audimax.

Aufgabe zum Gegenseitigkorrigieren

6. Man bestimme die Grenzwerte, falls sie existieren:

$$\lim_{n\to\infty} 3^{-n}(2^n + (-2)^n), \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 8n - 2}{n^3 + 7}, \qquad \lim_{n\to\infty} n^{-2} \sum_{\nu=0}^{n} \nu.$$

Lösung: 0, 2, $\frac{1}{2}$.

Aufgabe zum Gegenseitighelfen

7. Finden Sie eine Folge reeller Zahlen mit genau drei Häufungspunkten. Finden Sie eine weitere Folge reeller Zahlen, die jede natürliche Zahl als Häufungspunkt hat.

Aufgabe zum Romaneschreiben

8. Es sei $S = 2.9999999\cdots = 2 + 0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \dots$. Dann ist $10S = 20 + 9 + 0.9 + 0.09 + 0.009 + \dots$. Subtrahieren liefert $9S = 10S - S = 20 + 9 - 2 - 0 = 27$, also $S = 3$. Damit haben wir $2.99999\cdots = 3$. Wo steckt der Fehler ?