Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher 20.01.2012

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 11

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 27.01.2012, vor Beginn der Vorlesung.

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen
$$J_n(z) := \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k!(k+n)!}.$$
   (a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert diese Reihe ? Ungefähr welcher Summand hat den größten Betrag ? Kommentieren Sie die Konvergenzgeschwindigkeit und vergleichen Sie mit anderen Reihen, die Sie auf diesem Blatt sehen oder woanders gesehen haben.
   (b) Zeigen Sie das Additionstheorem $J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z)$ für $z \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}_+$.

   Anmerkung: Das sind die Besselfunktionen mit Anwendungen bei Schwingungen von Membranen oder Flugzeugflügeln oder Oszillatorketten.

2. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe der Exponentialfunktion $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ (entscheidend ist die Begründung) ?
   (a) Wir setzen $a_n(z) := \frac{1}{n!} z^n$. Wie verhält sich die Folge der Beträge $|a_n(z)|$, wenn n von 0 beginnend die natürlichen Zahlen durchläuft ?
   (b) Welcher Summand ist der Betragsgrößte ? Betrachten Sie $z = -30$ und $z = +20$. Wie groß ist dieser Summand ? Was fällt auf ?

3. (a) Es sei $f = f(x, y) = \sin(x + y)$ und $g = g(x, y) = y^2 - x^2$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Man bestimme
$$\inf_{y \in \mathbb{R}} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x, y)\right), \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\inf_{y \in \mathbb{R}} f(x, y)\right), \qquad \inf_{y \in \mathbb{R}} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} g(x, y)\right), \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\inf_{y \in \mathbb{R}} g(x, y)\right).$$
   (b) Man bestimme $\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} a_{n,m})$ und $\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} a_{n,m})$ für $a_{n,m} = \frac{n}{n+m}$.
   (c) Erkenntnis ?

4. Für eine beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen bezeichnen wir mit
$$\liminf_{n\to\infty} x_n, \qquad \limsup_{n\to\infty} x_n$$
   den kleinsten bzw. größten Häufungspunkt dieser Folge (gesprochen: limes inferior bzw. limes superior).

   Finden Sie zwei beschränkte Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit
$$\left(\liminf_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\liminf_{n\to\infty} b_n\right) < \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) < \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) < \left(\limsup_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\limsup_{n\to\infty} b_n\right).$$

   Moral: Die Addition reeller Zahlen ist mysteriöser als man glaubt. Es ist eben nicht immer zulässig, das + am lim inf vorbeizuziehen.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Sei $P_n = P_n(x)$ ein Polynom vom Grad n, mit höchstem Koeffizienten 2^{n-1}. Zeigen Sie, daß $\max_{x\in[-1,1]} |P_n(x)| \geq 1$.

   Anmerkung: Das bedeutet: egal wie Sie die niederen Koeffizienten von P_n wählen, Sie werden es nie schaffen, daß $\max_{x\in[-1,1]} |P_n(x)| < 1$ wird.

   Hinweis: indirekter Beweis. Angenommen, es wäre $|P_n(x)| < 1$ für jedes $|x| \leq 1$. Tragen Sie von Blatt 6, Aufgabe 4 Ihr Wissen über die Tschebyscheff–Polynome T_n zusammen. Skizzieren Sie (natürlich ohne schultypische Kurvendiskussion) den Graphen von T_n, für einige selbstgewählte Werte von n. Bilden Sie $Q_n(x) = T_n(x) - P_n(x)$. Zählen Sie, wie oft Q_n das Vorzeichen wechselt. Suchen Sie einen Widerspruch. Nehmen Sie bei Bedarf $n = 3, 4, 5$ oder ähnliches als konkrete Beispiele.

   Eine ingenieurtechnische Anwendung dieses Prinzips kommt nächste Woche.

Die Klausur wird am 24.02.12 stattfinden, von 11:00-13:00 Uhr im Audimax.

Aufgabe zum Rechnenüben

6. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{\sqrt{n}}.$$

Antwort: $[-1, 1)$, $[-1, 1]$, $(-1, 1]$