Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

27.01.2012

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 12

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 03.02.2012, vor Beginn der Vorlesung.

1. (a) Zeigen Sie folgende Rechenregel für die n-te Ableitung des Produktes zweier Funktionen f und g:
$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$
   (b) Die stetige Funktion $f = f(x)$ sei auf dem Intervall $[a, b]$ definiert, mit $a \leq f(x) \leq b$ für jedes $x \in [a, b]$. Beweisen Sie, daß f einen Fixpunkt in $[a, b]$ hat. Das heißt, daß wir einen Punkt $x_0 \in [a, b]$ suchen mit $f(x_0) = x_0$.

2. Mittels Cauchy–Produktreihe beweise man das Additionstheorem der Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$.

3. Finden Sie alle stetigen Funktionen $f = f(x) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die gilt: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$. Zeigen Sie, daß Sie wirklich *alle* solchen f gefunden haben.

   Erläuterung: Es geht nicht darum, ein solches f zu erraten — das wäre leicht. Sondern es geht darum, zu untersuchen, ob es noch ein zweites solches f geben kann.

   Hinweis: Setzen Sie clever gewählte Werte für x und y ein.

4. Die Funktion
$$f = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)^{2n}}$$
soll auf dem Intervall $[-1, 1]$ durch ein Polynom angenähert werden, sodaß der Fehler in jedem Punkt des Intervalls kleiner ist als $5 \cdot 10^{-4}$. Dabei soll der Polynomgrad so klein wie möglich sein.

   (a) Geben Sie eine verwertbare Abschätzung des Fehlers an, der entsteht, wenn man die Reihensummation bei $n = N$ abbricht (das geht ohne Taylorformel).

   (b) Folgen Sie der Methode der Tschebyscheff–Polynome, dargestellt im Text auf der Homepage, Seiten 10 und 11.

5. *Freiwillige Zusatzaufgabe*

   Beweisen Sie folgende Identitäten:
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2} + o(n^{-2})\right), \qquad n \to \infty,$$
$$\sqrt[n]{n} = 1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + o(n^{-2}), \qquad n \to \infty.$$
   Hierbei steht o für das Landausymbol.

   Hinweis: Taylorsatz für Logarithmus und Exp.

Die Klausur wird am 24.02.12 stattfinden, von 11:00-13:00 Uhr im Audimax.

Eine Anmeldung im StudIS ist erforderlich.

Aufgabe zum Selberkorrigieren

6. Man bestimme den Entwicklungspunkt und Konvergenzradius der Potenzreihen

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k3^k)^{-1}(2z-1)^{3k+2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k!}z^{5k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}(ez+\pi)^k.$$

Lösung: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}3^{1/3})$, $(0, \infty)$, $(-\frac{\pi}{e}, e^{-2})$.

Aufgabe zum Selberknobeln

7. Sei die stetige Funktion f definiert auf dem Intervall $[a-1, a+1]$, differenzierbar im Punkt a, und sei $f(a) \neq 0$. Zeigen Sie, daß

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n = \exp\left(\frac{f'(a)}{f(a)}\right).$$