Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher

03.02.2012

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 13 (Semesterendblatt)

1. Unter dem unendlichen Ausdruck

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\dots}}}}, \qquad a>0,$$

verstehen wir den Grenzwert der Folge a_n, wobei $a_1 = \sqrt{a}$, $a_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}}$, $a_3 = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$, usw.

   (a) Ermittle eine Rekursionsformel für die a_n!

   (b) Ermittle daraus eine Vermutung für den Grenzwert g, falls es den Grenzwert überhaupt gibt.

   (c) Zeige per Induktion $a_n < g$.

   (d) Benutze dies, um die Monotonie der Folge (a_n) zu zeigen.

2. Sei die Funktion $f = f(x)$ definiert auf (a,b), $x_0 \in (a,b)$, und sei f im Punkt x_0 differenzierbar. Zeige, daß der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \tag{1}$$

existiert, und berechne diesen Grenzwert.

3. Sei die Funktion $f = f(x)$ definiert auf (a,b) und $x_0 \in (a,b)$. Wir setzen voraus, daß der Grenzwert (1) existiert. Ist dann f im Punkt x_0 differenzierbar ? (Beweis oder Gegenbeispiel)

4. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, und sei $0 \le f'(x) \le f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: wenn $f(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, dann ist $f(x) = 0$ für *jedes* $x \in \mathbb{R}$.

   Hinweis: $g(x) = e^{-x} f(x)$.

5. Untersuchen Sie mittels der Regel von Bernoulli–L'Hospital die folgenden Grenzwerte:

   (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin(x)}{x}$,

   (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{b^x}$,

   (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sin(x)}{x+\sin(x)}$,

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x}$.

6. Sei $f = f(x)$ stetig differenzierbar im Intervall $[a,b]$, und sei $f(a) = f(b) = 0$. Zeigen Sie, daß die Funktion $u(x) = f'(x) + x^3 f(x)$ eine Nullstelle im Intervall (a,b) hat.

   Hinweis: Man untersuche $\varphi(x) = e^{g(x)} f(x)$, wobei $g = g(x)$ passend zu wählen ist.

7. (a) Die Ausbreitung von Wasserwellen in einem Kanal kann beschrieben werden durch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}u(t,x) + 6u(t,x) \cdot \frac{\partial}{\partial x}u(t,x) = 0,$$

wobei $u = u(t,x)$ die Auslenkung der Wasseroberfläche aus der Ruhelage bezeichnet, $t \in \mathbb{R}$ die Zeitvariable ist und $x \in \mathbb{R}^1$ die Ortsvariable. Man zeige, daß eine Lösung gegeben ist durch

$$u(t,x) = \frac{2c}{\cosh^2(\sqrt{c}(x - 4ct))},$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ ein wählbarer positiver Parameter ist.

Hinweis: Lindwurmlange Rechnungen zu fabrizieren ist eines Physikers unwürdig und deshalb auch nicht das Aufgabenziel. Das Lernziel besteht darin, die der Rechnung innewohnenden Mechanismen zu verstehen, die Arbeitsschritte sinnvoll zusammenzufassen, sodaß ein kurzer und sehr verständlicher Aufschrieb entsteht. Das geht auf etwas weniger als einer A4-Seite.

(b) Man mache eine Skizze von u, beschreibe den Zusammenhang zwischen Wellenhöhe, Wellenbreite und Ausbreitungsgeschwindigkeit, und entscheide ob das Superpositionsprinzip gilt.

Anmerkung: Die Funktion u heißt **Solitonen**lösung, und in der Sprache der theoretischen Mechanik formuliert: die Differentialgleichung beschreibt ein vollständig integrables HAMILTONsches System, das sogar unendlich viele Erhaltungsgrößen hat.

8. (a) Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen, und untersuchen Sie auf Stetigkeit:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & : x \neq 0, \\ 0 & : x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & : x \neq 0, \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$$

(b) Es seien $a, b \in \mathbb{N}$ zwei Parameter, und es sei $h = h(x)$ gegeben durch

$$h(x) = \begin{cases} x^a \sin\left(\frac{1}{x^b}\right) & : x \neq 0, \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$$

Finden Sie Werte für a und b so, daß die Ableitung h' überall existiert (auch im Nullpunkt), aber h' auf dem Intervall $[-1, 1]$ unbeschränkt ist.

Die Klausur wird am 24.02.12 stattfinden, von 11:00-13:00 Uhr im Audimax.

Eine Anmeldung im StudIS ist erforderlich.