

Einführung in die Theorie der Tschebyscheff-Reihen zur Approximation nichtlinearer Systeme

Torsten Scholt

Forschungsbericht Nr. 11/98

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Zur näherungsweise Beschreibung des dynamischen Verhaltens technischer Systeme dienen häufig Taylor-Reihen. Es können damit die hochgradig nichtlinearen Zusammenhänge eines analytischen Zustandsmodells mittels Polynomen approximiert werden. Der sich hinter der Taylorreihenapproximation verbergende Ansatz enthält einige Schwächen, die sich bei Betrachtung einer kleinen Umgebung um den Arbeitspunkt nicht bemerkbar machen. Entfernt man sich jedoch weiter von diesem, so weisen Taylor-Reihen einen relativ großen Approximationsfehler auf. Diese Mängel können teilweise durch die Wahl eines anderen Ansatzes umgangen werden. Der folgende Bericht soll aufzeigen, wie eine solche Transformation durchgeführt werden kann.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| Nomenklatur | II |
| 1 Einführung | 1 |
| 2 Modellbildung elastischer Handhabungssysteme | 2 |
| 3 Tschebyscheff-Approximation | 5 |
| 3.1 Generierung einer Taylor-Reihe | 5 |
| 3.2 Konditionierung zur Tschebyscheff-Reihe | 7 |
| 3.3 Eigenschaften der Tschebyscheff-Polynome | 12 |
| 3.4 Güte der Approximation | 14 |
| 4 Zusammenfassung und Ausblick | 22 |
| 5 Literatur | 23 |
| | |
| Anhang | 23 |
| A Erläuterungen | 23 |
| B Tschebyscheff-Polynome | 25 |

Nomenklatur

Vektoren und Matrizen

| | |
|--|---|
| $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ | Vektorfeld, Driftterm eines ALS |
| \mathbf{A}_i | Systemmatrizen |
| \mathbf{B}, \mathbf{B}_i | Eingangsmatrizen |
| \mathbf{C} | Ausgangsmatrix |
| \mathbf{D} | Dämpfungsmatrix |
| $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ | veränderliche Trägheitsmatrix |
| $\mathbf{h}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ | Vektor der Coriolis- und Zentrifugalkräfte |
| \mathbf{J} | konstante Trägheitsmatrix |
| $\mathbf{K}_e, \tilde{\mathbf{K}}$ | Steifigkeitsmatrix |
| \mathbf{K}_m | Verstärkungsmatrix der elektrischen Motoren |
| $\mathbf{q}(t)$ | Vektor der verallgemeinerten Koordinaten |
| $\mathbf{u}(t)$ | Eingangsvektor |
| $\mathbf{U}(t)$ | absolute Größen |
| \mathbf{U}_0 | Entwicklungspunkt der Stellgrößen |
| \mathbf{X}_0 | Entwicklungspunkt der Zustandsgrößen |
| $\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)$ | absolute Größen |
| $\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)$ | Zustandsvektor bzw. dessen Ableitung |
| $\mathbf{y}(t)$ | Ausgangsvektor |

Skalare Größen

| | |
|--------------------------|---|
| D | maximale Abweichung eines Polynoms von der Originalfunktion |
| $f(x)$ | beliebige Funktion in x |
| $g_i(x)$ | Monom in x vom Grade i |
| i, j, k, l | Indizes |
| m | Anzahl der Systemeingänge |
| n | Systemordnung |
| p | Anzahl der Systemausgänge |
| $q_i(t)$ | i -te verallgemeinerte Koordinate |
| $T_i(x)$ | Tschebyscheff-Polynom vom Grade i in x |
| t | Zeit |
| $u(t)$ | Eingangsgröße eines Eingrößensystems |
| $u_i(t)$ | i -ter Systemeingang |
| (X_i, Y_i) | i -tes Koordinatensystem der Starrkörperkoordinaten |
| (\hat{X}_i, \hat{Y}_i) | i -tes Koordinatensystem der elastischen Koordinaten |
| ϑ_i | i -te Starrkörperkoordinate |
| $\delta_{i,j}$ | j -te elastische Koordinate des i -ten Balkens |
| β_i | Koeffizient eines Eingrößenapproximationspolynoms |
| $\phi_{i1}(l_i)$ | 1. Eigenfunktion des i -ten elastischen Gliedes an der Stelle l_i |

Operatoren und sonstige Zeichen

| | |
|-----------------|--------------------------------|
| \mathbb{R} | Menge der reellen Zahlen |
| \mathcal{U}_0 | Umgebung um \boldsymbol{x}_0 |
| \otimes | Kronecker-Produktoperator |

Abkürzungen

| | |
|-----|---|
| ALS | Analytisches System mit linear eingehender Steuerung |
| BLS | Bilineares System |
| LS | Lineares System |
| QLS | Zustandsquadratisches System mit linear eingehender Steuerung |

1 Einführung

Ein wichtiger Aspekt der Regelungstechnik, das dynamische Verhalten eines Systems beschreiben zu können. So ist es möglich, zu vielen Teilgebieten (Synthese von Regelgesetzen, Strukturuntersuchungen) Zugang zu finden. Nutzt man die Möglichkeiten der Mathematik und Physik, so läßt sich oft eine analytische Beschreibung eines solchen Systems bestimmen.

Meist ist eine solche Beschreibung hochgradig nichtlinear und komplex und somit nur eingeschränkt für weitere Untersuchungen geeignet. Für viele Anwendungen ist eine solch aufwendige Beschreibung nicht erforderlich, da es nur interessiert, ein System in der Nähe eines Arbeitspunkts zu halten. Eine einfachere Beschreibung, beispielsweise eine lineare Näherung, ist in solchen Fällen ausreichend. Ein Standardverfahren, um eine solche Approximation durchzuführen, sind Taylor-Reihen. Ist eine Beschreibung, i. e. das Zustandsmodell, analytisch, so läßt sich eine beliebig genaue und komplexe Näherung bestimmen. Meist beschränkt man sich hier auf lineare oder bilineare Approximationen, welche sich besonders durch ihre einfache Handhabbarkeit auszeichnen. Diese Modelle sind jedoch nur in einem relativ kleinen Gebiet um den Arbeitspunkt hinreichend genau. Exakt sind sie nur im Entwicklungspunkt.

Um einen größeren Arbeitsbereich abdecken zu können, ist es notwendig, Näherungen höherer Ordnung in Betracht zu ziehen. Hier sind allerdings wiederum Grenzen in der Handhabbarkeit gesetzt. Systeme zweiter Ordnung (QLS) bis maximal dritter Ordnung stellen bei komplexen Zustandsmodellen die obere Grenze dar. Ein Mittel, diese Restriktion zu mildern, ist die Möglichkeit, die Eigenschaften der Taylor-Reihe durch geeignete Manipulationen zu verändern. So kann erreicht werden, daß der Fehler bei der Approximation gleichmäßig verteilt ist und es lassen sich die Konvergenzeigenschaften verändern. Ein Mittel dazu ist der Übergang von Monomen in x zu Termen in $\cos(x)$ als Basis der Beschreibung. Das System wird mittels einer Tschebyscheff-Reihe angenähert.

Da diese Art der Approximation in der Systemtheorie noch nicht gebräuchlich ist, wird in der folgenden Arbeit die Nutzung der Tschebyscheff-Reihen zur Näherung von Zustandsmodellen eingeführt und an einem einfachen Beispiel erläutert werden. So wird in Abschnitt 2 zunächst erläutert, wie es möglich ist, ein physikalisches Modell einer real existierenden technischen Anlage zu bestimmen. Dann wird beschrieben, wie eine Taylor-Approximation (Abschnitt 3) generiert werden kann, die das dynamische Verhalten des physikalischen Modells in vereinfachter Weise beschreibt. Schließlich wird das so gewonnene Zustandsmodell in der Art konditioniert, daß die Approximation in Form einer Tschebyscheff-Reihe vorliegt. Des weiteren werden kurz einige Eigenschaften der Tschebyscheff-Polynome erläutert. Entsprechende Ergebnisse werden mit Simulationsdaten belegt. Der Bericht schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick in Abschnitt 4.

2 Modellbildung elastischer Handhabungssysteme

Ausgangspunkt zur analytischen Beschreibung des betrachteten elastischen Handhabungssystems ist die technische Anlage, wie sie in Bild 2.1 zu finden ist. Dieses System wurde in einer Art und Weise entworfen und realisiert, daß die wesentlichen Eigenschaften eines elastischen Roboters hervorgehoben werden.

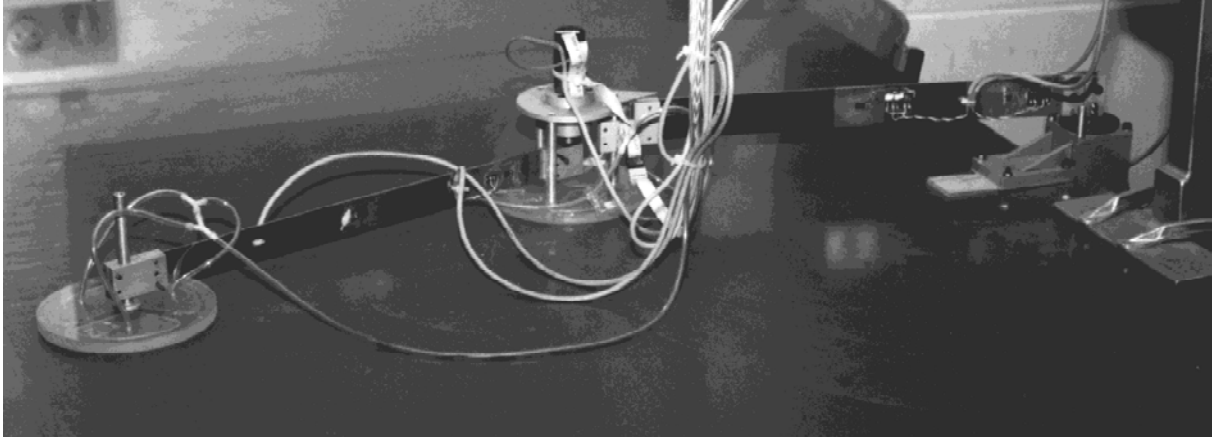


Bild 2.1: Elastischer Manipulator (Versuchsträger)

Zunächst ist zu erkennen, daß die elastischen Glieder derart ausgeformt sind, daß sich andere Elastizitäten, z. B. die der Gelenke, vernachlässigen lassen. Eine Verformung ist darüberhinaus nur in einer Ebene möglich. Es wird angenommen, daß es sich jeweils um schlanke Balken handelt, welche sich als Euler-Bernoulli-Balken beschreiben lassen. Nichtlineare Biegung sowie interne Reibung können vernachlässigt werden. Um die Reibung zwischen der Tischplatte und dem elastischen Arm zu minimieren, wird dieser auf Luftlagern gelagert. Der Antrieb erfolgt über zwei Elektromotoren. Eine vollständige Beschreibung ist in (Bai 1996) zu finden.

Die Modellierung des elastischen Handhabungssystems basiert auf einer analytischen Beschreibung, wobei jedoch die Modellparameter zunächst unbekannt sind (Arteaga Pérez und Riege 1997). Da mit der analytischen Formulierung des dynamischen Verhaltens die Struktur des Systems bekannt ist, gilt es nun noch, jene physikalischen Parameter zu bestimmen. Nach der Durchführung geeigneter Experimente, stehen die gesuchten Daten zur Verfügung. Es treten vor allem Probleme bei der Bestimmung der Eigenformen des elastischen Systems auf. Die Lösung dieses Problems ist, die Annahme zu treffen, daß sich die Eigenformen dieses Systems von bekannten einfachen mechanischen Systemen übertragen lassen (Bernzen und Büdding 1995, Fraser und Daniel 1991). Diese Vorgehensweise nennt man das „assumed-mode-shapes“-Verfahren.

Vereinfachend kann angenommen werden, daß die reale Strecke eine Struktur besitzt, wie sie in Bild 2.2 dargestellt ist. Die Eingänge des Systems $u_1(t)$ und $u_2(t)$, d.h. die

Eingangsspannungen der Motoren, werden zu einem Vektor $\mathbf{u}(t)$ zusammengefaßt. Die Motoren werden als ideale Momentenwandler aufgefaßt. Wählt man als verallgemeinerte

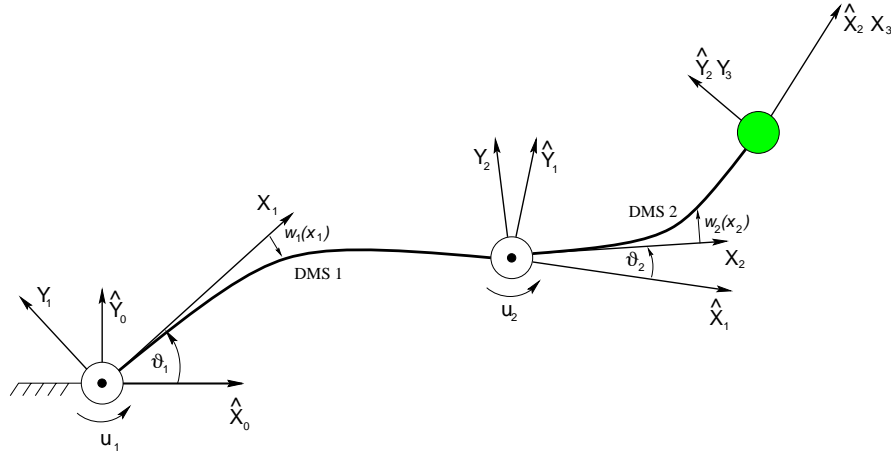


Bild 2.2: Elastischer Manipulator (Modell)

Koordinaten die Starrkörperwinkel ϑ_1 und ϑ_2 und jeweils einen elastischen Freiheitsgrad $\delta_{1,1}$ und $\delta_{2,1}$ pro elastischem Glied:

$$\mathbf{q} = [\vartheta_1, \vartheta_2, \delta_{1,1}, \delta_{2,1}]^T, \quad (2.1)$$

so läßt sich mittels geeigneter Transformationsmatrizen¹ die Kinematik des elastischen Handhabungssystems eindeutig bestimmen. Die Gleichungen zur Berechnung der Koordinaten $\delta_{1,1}$ und $\delta_{2,1}$ lassen sich aus den Biegelinien $w_1(x_1)$ und $w_2(x_2)$ (siehe Bild 2.2) ableiten. Die Beschreibung erfolgt im globalen Koordinatensystem (\hat{X}_0, \hat{Y}_0) .

Das Ergebnis des in (Arteaga Pérez und Riege 1997) detailliert beschriebenen Modellbildungsverfahrens ist ein System von vier Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\vartheta\vartheta}(\boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\delta}) & \mathbf{H}_{\vartheta\delta}(\boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\delta}) \\ \mathbf{H}_{\vartheta\delta}^T(\boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\delta}) & \mathbf{H}_{\delta\delta}(\boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\delta}) \end{bmatrix} + \mathbf{J} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\vartheta}} \\ \ddot{\boldsymbol{\delta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{c,\vartheta}(\boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\delta}, \dot{\boldsymbol{\vartheta}}, \dot{\boldsymbol{\delta}}) \\ \mathbf{h}_{c,\delta}(\boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\delta}, \dot{\boldsymbol{\vartheta}}, \dot{\boldsymbol{\delta}}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{D}}\dot{\boldsymbol{\delta}} + \tilde{\mathbf{K}}\boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

oder

$$[\mathbf{H}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}] \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_e \mathbf{q} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{u} = \mathbf{K}_m \mathbf{U}. \quad (2.3)$$

Die Elemente der Trägheitsmatrizen $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ und \mathbf{J} und des Coriolis- bzw. Zentrifugalvektors $\mathbf{h}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ lassen sich aus den physikalischen Eigenschaften des Handhabungssystems (Massen, Trägheitsmomente) bestimmen. Damit ist die mathematische Beschreibung der Dynamik des Handhabungssystems bekannt und muß nun noch mit den entsprechenden

¹ Transformation der lokalen Koordinaten in das globale Koordinatensystem (\hat{X}_0, \hat{Y}_0)

Parametern ergänzt werden. Zu ermitteln sind die Einträge der Modell- bzw. Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e , der Dämpfungsmatrix \mathbf{D} und der Verstärkungsmatrix \mathbf{K}_m der elektrischen Antriebe. Die Bestimmung dieser Werte geschieht in mehreren experimentellen Schritten, wie in (Arteaga Pérez und Riege 1997) beschrieben. Das so gewonnene Modell läßt sich durch geeignete Manipulationen in die für regelungstechnische Untersuchungen nötige Zustandsform bringen. Dazu wird Gleichung (2.2) nach den Beschleunigungen des Systems aufgelöst. Es ergibt sich

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = (\mathbf{H} + \mathbf{J})^{-1} [-\mathbf{h}_c - \mathbf{K}_e \mathbf{q}(t) - \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_m \mathbf{U}(t)]. \quad (2.4)$$

Das zuvor hergeleitete System von 4 Differentialgleichungen zweiter Ordnung wird nun in ein System von 8 Differentialgleichungen der Ordnung eins überführt und ergibt somit ein Zustandsmodell, das für regelungstechnische Untersuchungen genutzt werden kann. Die verallgemeinerten Koordinaten und deren Ableitungen werden zum Zustandsvektor

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix}$$

zusammengefaßt. Geeignete Matrixoperationen führen dann zu einem nichtlinearen Zustandsmodell mit linear eingehender Steuerung, das der Systemklasse der ALS angehört (Schwarz 1991):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ -(\mathbf{H} + \mathbf{J})^{-1}(\mathbf{h}_c + \mathbf{K}_e \mathbf{q}(t) + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ (\mathbf{H} + \mathbf{J})^{-1} \mathbf{K}_m \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ &:= \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{c}(\mathbf{x}(t)) \quad ; \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^8, \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^2, \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Im folgenden wird dargelegt, wie ein solches dynamisches Modell eines mechanischen Systems mit Hilfe einer Tschebyscheff-Reihe approximiert werden kann und welche Eigenschaften diese Approximation aufweist.

3 Tschebyscheff-Approximation

Da das in Abschnitt 2 vorgestellte Zustandsmodell zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens hochgradig nichtlinear ist, ist es relativ schwierig, dieses in weiteren Anwendungen, wie z.B. der Synthese nichtlinearer Regler oder Strukturuntersuchungen zu nutzen. Daher ist es wünschenswert, eine Approximation dieses Systems zu bilden, die das Verhalten der Strecke möglichst gut in einem großen Arbeitsbereich wiedergibt. Eines der Standardwerkzeuge für diesen Zweck ist die Taylor-Reihenentwicklung. Mit ihrer Hilfe läßt sich jede hinreichend oft differenzierbare Funktion als unendliche Reihe entwickeln, die nach dem gewünschten Glied abgebrochen werden kann. Je nach gewähltem Polynomgrad gibt die Taylor-Reihe die ursprüngliche Funktion mit entsprechender Güte und einem entsprechend großen Gültigkeitsbereich um den Arbeitspunkt wieder. Diese Art der Näherung hat jedoch einige offensichtliche Beschränkungen. Zunächst kann der Konvergenzradius sehr begrenzt sein und die Anzahl der zur Approximation nötigen Terme kann sehr groß werden. Beides hängt vom Argument der Näherung ab. Nur im Entwicklungspunkt ist die Näherung exakt. Entfernt man sich vom Arbeitspunkt, so kann der Fehler schnell ansteigen. Um diese Nachteile in ihrer Tragweite zu minimieren, ist es möglich, die Konvergenzeigenschaften einer Polynom-Approximation mittels geeigneter Manipulationen zu verändern. Eine dieser Manipulationen ist die Abbildung einer Taylor-Approximation in eine Tschebyscheff-Reihe. Diese lineare Operation (Fromm 1975) soll im folgenden erläutert werden.

3.1 Generierung einer Taylor-Reihe

Da die veränderten bzw. verbesserten Eigenschaften der Approximation erst bei Polynomen höherer Ordnung auftreten, sollen im weiteren Zustandsmodelle höherer Ordnung betrachtet werden, wie z.B. quadratischen Näherungen (Schwarz 1993) und Polynom-Systemen. Hier wären besonders Näherungen dritter Ordnung interessant, da auch Funktionen mit einem ausgeprägten Wendepunkt abgebildet werden können. Ausgangspunkt einer Tschebyscheff-Näherung ist eine Taylor-Approximation, wie sie in (Spielmann und Jelali 1996) vorgestellt wurde.

Nach (Vetter 1973) läßt sich für ein Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{Z})$ ($\mathbf{F}(\mathbf{Z}), \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^n$) um einen Arbeitspunkt \mathbf{Z}_0 eine Taylor-Reihe der Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{Z}) = \mathbf{F}(\mathbf{Z}_0) + \sum_{j=1}^l \frac{1}{j!} \frac{\partial^j \mathbf{F}(\mathbf{Z})}{\partial \mathbf{Z}^j} \Bigg|_{\mathbf{Z}_0} (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0)^{(j)} + \mathbf{R}_{l+1}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_0) \quad (3.1)$$

bilden. Ausgangspunkt für die Bildung einer Approximation ist ein ALS der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{U}); & \mathbf{X}_0 &= \mathbf{X}(t_0), & \mathbf{X}(t) &\in \mathbb{R}^n, & \mathbf{U}(t) &\in \mathbb{R}^m \\ \mathbf{Y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(t), & \mathbf{Y}(t) &\in \mathbb{R}^p & . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Es lassen sich um einen Arbeitspunkt $\mathbf{P}_0(\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0)$ die entsprechenden Taylor-Reihen entwickeln. Für die Zustandsvariablen kann man annehmen, daß

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{U}(t) - \mathbf{U}_0 \end{aligned} ,$$

und

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) - \mathbf{F}(\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0)$$

gilt. Die Großbuchstaben stellen dabei absolute Größen dar. Zusätzlich wird vorausgesetzt, daß das System zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ in Ruhe ist, d.h. $\dot{\mathbf{X}}(t_0) = \mathbf{0}$ gilt. Für die interessierenden Systemklassen ergeben sich damit folgende Notationen:

PLS:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{P}_0} \mathbf{x}(t) + \sum_{j=2}^r \frac{1}{j!} \left. \frac{\partial^j \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{X}^j} \right|_{\mathbf{P}_0} \mathbf{x}^{(j)}(t) \\ &\quad + \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t) + \sum_{j=2}^{r-1} \frac{1}{j!} \left. \frac{\partial^{j+1} \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{X}^j \partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{P}_0} \mathbf{x}^{(j)}(t) \otimes \mathbf{u}(t) \\ &=: \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \sum_{i=2}^r \mathbf{A}_i \mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(t) + \sum_{j=1}^r \mathbf{B}_j \mathbf{x}^{(j)} \otimes \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t); \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p. \end{aligned} \quad (3.3)$$

QLS:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\mathbf{P}_0} \mathbf{x}(t) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{X}^2} \right|_{\mathbf{P}_0} \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) \\ &\quad + \left. \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{P}_0} \mathbf{u}(t) + \left. \frac{\partial^2 \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{X} \partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{P}_0} \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{u}(t) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^3 \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{X}^2 \partial \mathbf{U}} \right|_{\mathbf{P}_0} \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{u}(t) \\ &=: \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) + \\ &\quad \mathbf{B}_0 \mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{x}^{(2)}(t) \otimes \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t); \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Die Notation des Kronecker-Produktes ist im Anhang A erläutert. Die Bestimmung der Zahlenwerte der Matrizen \mathbf{A}_i und \mathbf{B}_j kann beispielsweise mit einem Software-Tool, welches ebenfalls in (Spielmann und Jelali 1996) vorgestellt wird, durchgeführt werden. Aus

dem in Abschnitt 2 bzw. (Arteaga Pérez und Riege 1997) vorgestellten Modell des zweiachsigen Roboters läßt sich mit geeigneten Mitteln (MATLAB[®] und MAPLE[®]) ein analytisches Differentialgleichungssystem (Gl. (2.5)) zusammenstellen. Legt man darüber hinaus noch Arbeitspunkte \mathbf{X}_0 und \mathbf{U}_0 fest und nutzt die Möglichkeiten des erwähnten Software-Tools, so kann relativ einfach eine Taylor-Approximation des analytischen Modells generiert werden.

3.2 Konditionierung zur Tschebyscheff-Reihe

Im weiteren Verlauf wird erläutert, wie eine so generierte Approximation in der Art konditioniert werden kann, daß eine Tschebyscheff-Reihe entsteht, welche die erwarteten besseren Konvergenzeigenschaften besitzt. Zunächst werden die Betrachtungen zur Verdeutlichung auf Funktionen, die \mathbb{R} nach \mathbb{R} abbilden, beschränkt. Die Ausführungen lehnen sich dabei an (Carnahan u. a. 1969).

Die bisher betrachteten Approximationen mittels Taylor-Reihen bestehen aus Linearkombinationen von Monomen der Form $g_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, und den entsprechenden n Koeffizienten β_i . So kann eine beliebige Funktion $f(x)$ mittels einer Polynomapproximation n -ter Ordnung

$$P_n(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_n x^n \quad (3.5)$$

beliebig genau angenähert werden. Ein Vernachlässigen von Termen höherer Ordnung würde erst beim Verlassen der Umgebung um $x_0 = 0$ größere Fehler verursachen. Nähert man sich jedoch den Grenzen des Intervalls $[-1, 1]$, so wird dieser Fehler maximal. Bild 3.1 zeigt die Monome x^1, x^2, x^3 und x^4 . Es wird deutlich, daß im Intervall $[-1, 1]$ alle Elementarfunktionen an den Grenzen des Intervalls den größten und bei $x = 0$ den kleinsten Betrag aufweisen. Der Fehler der Näherung bezüglich der ursprünglichen Funktion $f(x)$ ist damit ungleichmäßig im Intervall verteilt.

Eine geschickte Wahl anderer Funktionen könnte in dieser Beziehung deutlich bessere Eigenschaften der Approximation hervorbringen. Es muß also eine Gruppe von Funktionen gefunden werden, die einfach zu generieren sind und den maximalen Fehler zwischen der Funktion und der Näherung minimieren (Minimax-Theorie), sowie bessere Konvergenzeigenschaften aufweisen. So bietet z. B. die Reihe von Cosinus-Funktion $\cos(\theta), \cos(2\theta), \dots, \cos(n\theta)$ genau diese gewünschten Eigenschaften. Alle Funktionen haben die Extremalwerte ± 1 , die über einem beliebig gewählten Intervall, inklusive der Intervallgrenzen, gleichmäßig verteilt sind (Bild 3.2). Damit ist der Fehler der Approximation ebenso gleichmäßig im Intervall verteilt. Darüber hinaus gilt $\cos(j\theta) \neq \cos(k\theta)$ für $j \neq k$. Man spricht bei Tschebyscheff-Approximation auch von einer Intervallapproximation, da nicht um einen Arbeitspunkt, sondern in einem Intervall entwickelt wird.

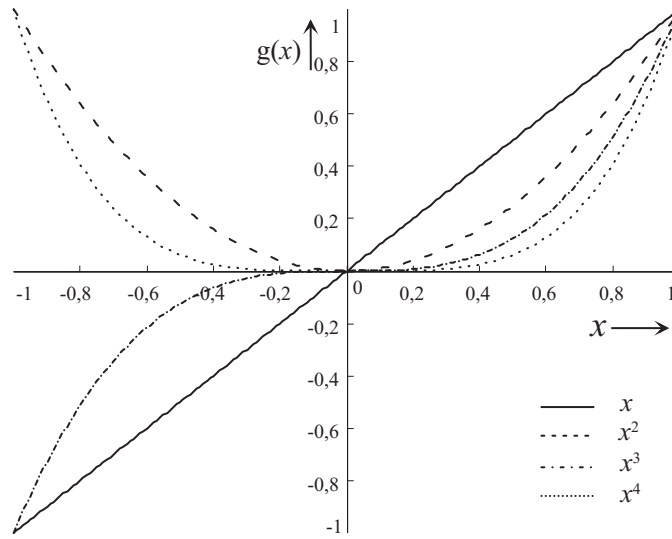
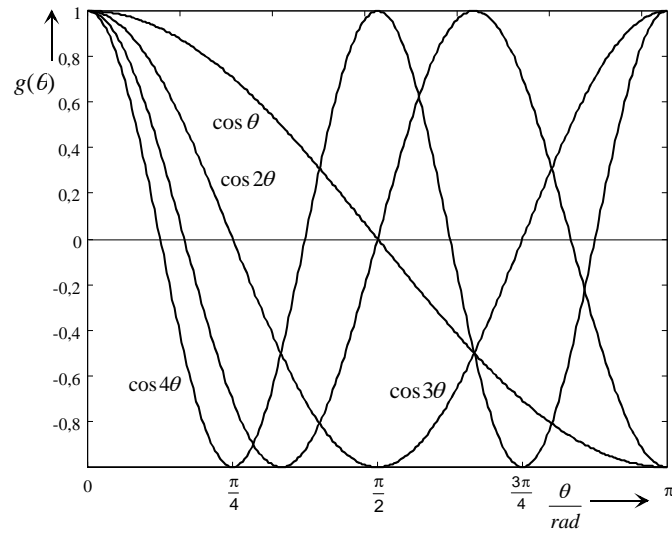
Bild 3.1: Elementarfunktionen x^1, x^2, x^3, x^4 

Bild 3.2: Cosinus-Funktionen

Die so gebildeten Funktionen $T_n(x) = \cos(n\theta)$, $n = 0, 1, \dots$, nennen sich Tschebyscheff-Polynome, und sind gültig im Bereich $0 \leq \theta < \pi$. Damit sind diese mit den Fourier-Reihen eng verknüpft. Da diese Terme jedoch nur schwer in dieser Form handhabbar sind, muß zur ihrer numerischen Bestimmung die Beziehung

$$\theta = \arccos x \quad (3.6)$$

genutzt werden, welche die cos-Terme in Polynome in x überführt. Diese sind im Intervall

$[-1, 1]$ gültig. So gilt $T_0(x) = \cos(0) = 1$ und weiterhin

$$T_1(x) = \cos \theta = \cos(\arccos x) = x \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} T_2(x) &= \cos 2\theta = \cos(2 \arccos x) = 2 \cos^2(\arccos x) - 1 \\ &= 2x^2 - 1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

\vdots

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x). \quad (3.9)$$

Durch die Intervalltransformation

$$x = \frac{2y - b - a}{b - a}, \quad y \in [a, b]; \quad x \in [-1, 1] \quad (3.10)$$

kann der Gültigkeitsbereich der Tschebyscheff-Polynome beliebig verändert werden. Die Näherung wird also nicht um einen Arbeitspunkt entwickelt, sondern in einem beliebigen Intervall.

Somit besteht eine rekursive Beziehung zur Berechnung der einzelnen Tschebyscheff-Polynome. Eine Liste dieser Polynome und der entsprechenden inversen Terme findet sich im Anhang B. In Bild 3.3 sind die Tschebyscheff-Polynome der Ordnungen 0 bis 3 dargestellt.

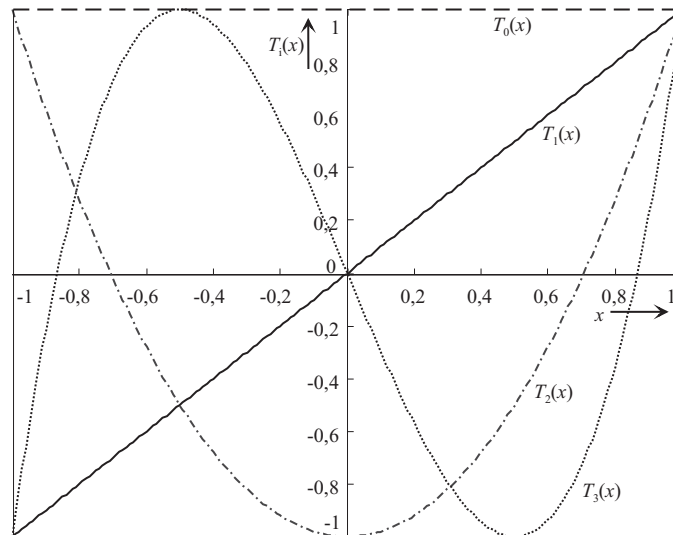


Bild 3.3: Tschebyscheff-Polynome der Ordnungen 0 bis 3

Im folgenden wird erläutert, wie es möglich ist, mit relativ einfachen Modifikationen ein Näherungspolynom, erzeugt durch eine Taylor-Reihe, so zu verändern, daß es die zuvor erwähnten Eigenschaften besitzt. Die ausgeführten Betrachtungen gelten zunächst nur für Funktionen in einer Variablen. Es ist jedoch möglich, die Vorgehensweise auf multivariable

Probleme zu übertragen, indem man den Vorgang für jede Variable einzeln wiederholt. Nach (Ehlich und Zeller 1966) gilt, daß ein Polynom

$$P_{nm}(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j \quad (3.11)$$

durch das Produkt zweier Tschebyscheff-Reihen vom Grade n bzw. m in den jeweiligen Variablen ausgedrückt werden kann durch:

$$P(x, y) = T_{mn}(x, y) = T_m(x)T_n(y). \quad (3.12)$$

Es gilt dieser Satz auch für mehr als zwei Veränderliche.

Zunächst muß eine Taylor-Reihe² mit dem Höchstgrad $n^* \geq n$ für einen bestimmten Arbeitspunkt generiert werden. Nimmt man an, daß die Taylor-Näherung im betrachteten Intervall einen bestimmten Fehler zwischen der ursprünglichen Funktion und der Approximation nicht überschreitet, so kann man mit einer Tschebyscheff-Reihe die Ordnung des Systems reduzieren, ohne diese Fehlerschranke zu verletzen. Ersetzt man nun die Monome der Taylor-Reihe nach der im Anhang B definierten Zuweisung, so ist das Ergebnis ein Ausdruck in den Tschebyscheff-Polynomen $T_i(x)$. Sortiert man diese Ausdrücke nach den Tschebyscheff-Polynomen, kann an dieser Stelle die Näherung nach der gewünschten Ordnung abgebrochen werden. Beschränkt man sich beispielsweise auf ein System zweiter Ordnung, so werden alle Tschebyscheff-Polynome $T_i(x), i > 2$, bzw. entsprechende Kombinationen, vernachlässigt. Werden nun die verbliebenen $T_i(x)$ mit den im Anhang aufgeführten Termen substituiert, so erhält man wiederum einen Ausdruck, welcher aus Monomen in x besteht, die jedoch andere Koeffizienten besitzen. Der beschriebene Vorgang nennt sich die „Rationalisierung einer Potenzreihe“³ (Carnahan u. a. 1969). Zur Verdeutlichung werden die Modifikationen an einem kurzen Beispiel demonstriert.

Beispiel 3.1 Es soll eine Cosinus-Funktion durch ein aus drei Termen bestehendes Polynom

$$\cos x \approx a + bx^2 + cx^4, \quad (\text{B 3.1-1})$$

approximiert werden. Die Fehlerschranke wird willkürlich nach oben zu $5 \cdot 10^{-5}$ begrenzt. Die Betrachtungen gelten für ein Intervall $[-1, 1]$. Die Taylor-Reihe dieser Funktion kann wie folgt dargestellt werden:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots \pm \frac{x^n}{n!} \mp \dots \quad (\text{B 3.1-2})$$

Für die vernachlässigten Terme läßt sich der Fehler angeben zu $n^{n+2}/(n+2)! \cos \xi, |\xi| < 1$. Dies sagt aus, daß der durch die Vernachlässigung verursachte Fehler kleiner ist,

² ggf. multivariabel

³ engl.: telescoping a powerseries

als der erste weggelassene Term. Wird die obige Darstellung der Cosinus-Funktion nach dem Term x^8 abgebrochen, so ergibt sich im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ ein Fehler, der kleiner ist als $1/10! = 2,76 \cdot 10^{-7}$. Wird nun die verbleibende Reihe aus fünf Termen durch die Tschebyscheff-Polynome (B.2) in den T_i ersetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \cos x &\approx T_0 \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{2!} (T_0 + T_2) \\ &\quad - \frac{1}{8} \frac{1}{4!} (3T_0 + 4T_2 + T_4) \\ &\quad - \frac{1}{32} \frac{1}{6!} (10T_0 + 15T_2 + 6T_4 + T_6) \\ &\quad - \frac{1}{128} \frac{1}{8!} (35T_0 + 56T_2 + 28T_4 + 8T_6 + T_8). \end{aligned} \quad (\text{B 3.1-3})$$

Sortiert man diesen Ausdruck nach den Tschebyscheff-Polynomen T_i , so erhält man

$$\begin{aligned} \cos x &\approx 0,76519775T_0 - 0,22980686T_2 \\ &\quad + 0,0049533419T_4 - 4,185265 \cdot 10^{-5}T_6 \\ &\quad + 1,937624 \cdot 10^{-7}T_8. \end{aligned} \quad (\text{B 3.1-4})$$

Da der größte Betrag eines Tschebyscheff-Polynoms im Intervall $[-1, 1]$ gleich 1,0 ist, verursacht die Vernachlässigung der Terme T_6 und T_8 einen Fehler, der maximal $4,185265 \cdot 10^{-5} + 1,937624 \cdot 10^{-7} = 4,206 \cdot 10^{-5}$ beträgt. Addiert man diesen Betrag zum maximalen Fehler, der durch die Taylor-Reihe verursacht wird, so ergibt sich ein Gesamtfehler von maximal $4,234 \cdot 10^{-5}$. Damit bleibt der Fehler kleiner als der zuvor definierte Fehler von $5 \cdot 10^{-5}$. Die dadurch ermittelte Approximation lautet demnach:

$$\cos x \approx 0,76519775T_0 - 0,22980686T_2 + 0,0049533419T_4 \quad (\text{B 3.1-5})$$

Führt man nun eine Rücktransformation mit den im Anhang B gegebenen Termen durch so ergibt sich folgendes Polynom in x :

$$\cos x \approx 0,99995795 - 0,49924045x^2 + 0,03962674x^4. \quad (\text{B 3.1-6})$$

Hätte man das originale Taylor-Polynom auf 4 Glieder beschränkt, so wäre der Fehler mit

$$\frac{1}{6!} = \frac{1}{720} \approx 1,39 \cdot 10^{-3} \quad (\text{B 3.1-7})$$

nach oben beschränkt. Dieser wäre um den Faktor 28 größer als der zuvor spezifizierte Fehler.

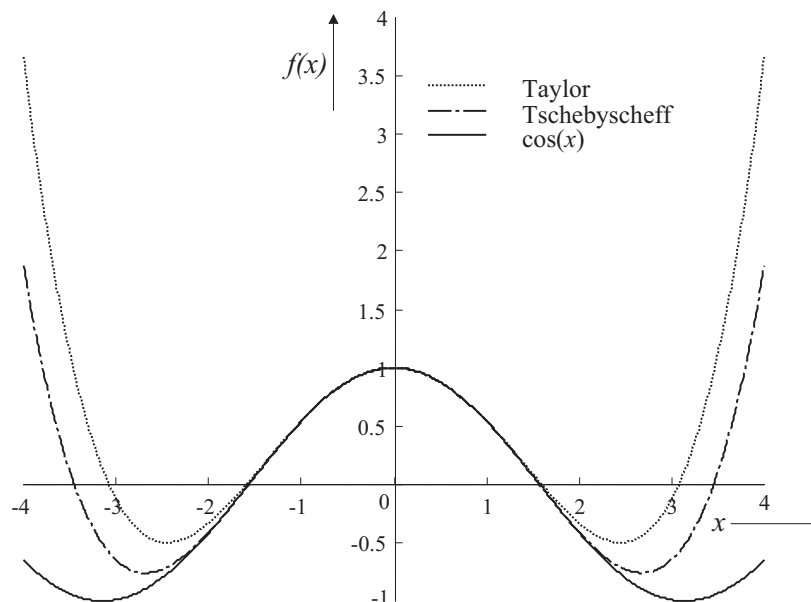


Bild 3.4: Approximation einer Cosinus-Funktion mit Hilfe von Taylor- und Tschebyscheff-Reihen

Betrachtet man Bild 3.4, so sind die Originalfunktion $\cos(x)$ und eine in eine Taylor-Reihe bzw. als Tschebyscheff-Reihe entwickelte Näherung zu erkennen. Es wird deutlich, daß Tschebyscheff-Reihen einen eindeutigen Vorsprung gegenüber Taylor-Reihen haben. Berechnet man die Fehler zwischen den Approximationen und der ursprünglichen Funktion $\cos(x)$, so zeigt sich, daß die Tschebyscheff-Reihe an den Intervallgrenzen einen um den Faktor 33 kleineren Fehler aufweist.

3.3 Eigenschaften der Tschebyscheff-Polynome

In Bild 3.3 ist zu erkennen, daß ein Tschebyscheff-Polynom n -ter Ordnung ($n+1$) Maxima von gleichem Betrag (1, 0) mit alternierenden Vorzeichen besitzt. Die Polynome besitzen n reelle Wurzeln mit

$$\lambda_i = \cos \left[\frac{(2i-1)\pi}{2n} \right], \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

Außerdem besitzen normierte Tschebyscheff-Polynome des Grades n

$$\Phi_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} \quad (3.14)$$

den kleinsten Betrag im Intervall $[-1, 1]$ aller Monompolynome des gleichen Grades (Carnahan u. a. 1969). Läßt sich der Fehler zwischen einer Approximation und deren ursprünglichen Funktion als Polynom ausdrücken, so ist es möglich diesen, und die maximale Abweichung des Polynoms $P^*(x)$ von der ursprünglichen Funktion $f(x)$ zur vorherigen Näherung $P(x)$

zu minimieren:

$$D = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - P_n^*(x)| \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - P_n(x)|. \quad (3.15)$$

Es ist möglich, eine so bestimmte Näherung schon nach einer kleineren Anzahl von Termen abzurechnen. $P_n^*(x)$ kann nach (Carnahan u. a. 1969) eindeutig bestimmt werden. $P_n^*(x)$ wird das „minimax“ Polynom genannt. Es hat $n + 1$ Stützstellen, an welchen es exakt mit $f(x)$ übereinstimmt. Zwischen diesen Punkten ist an $n + 2$ Stellen die Abweichung $d^*(x) = f(x) - P_n^*(x)$ maximal.

Es lassen sich Approximationen, welche die Eigenschaften einer ursprünglichen Funktion nur eingeschränkt wiedergeben, durch relativ einfache Manipulationen in einer Art konditionieren, daß sie ihren Zweck sehr viel besser erfüllen. Bestehende Taylor-Approximationen lassen sich in ihrer Güte verbessern, da Tschebyscheff-Reihen bessere Konvergenzeigenschaften und einen geringeren maximalen Fehler aufweisen.

3.4 Güte der Approximation

Um zu demonstrieren, wie sich die in Abschnitt 3 beschriebenen Modifikation auswirken werden diese auf ein QLS angewandt, wie es in Abschnitt 2 ermittelt wurde. Um die Güte der mit den beiden Approximationsmethoden ermittelbaren Modelle abschätzen zu können, ist es sinnvoll, für ein vorgegebenes Stellsignal die Antworten aller approximierten Zustandsmodelle mit der Antwort des physikalischen Modells zu vergleichen. Als geeignete Antwortsignale bieten sich die Position des Endeffektors und die elastischen Koordinaten an. Aus den Zuständen des Systems läßt sich diese Position über geeignete Transformationen ermitteln (Arteaga Pérez und Riege 1997). Es werden drei Arbeitspunkte betrachtet.

Als Arbeitspunkte werden die in Tabelle 3.1 aufgeführten Werte gewählt. Mit der Wahl dieser Arbeitspunkte ist ein Vielzahl von möglichen Konfigurationen des elastischen Roboters abgedeckt, wie Bild 3.5 zeigt.

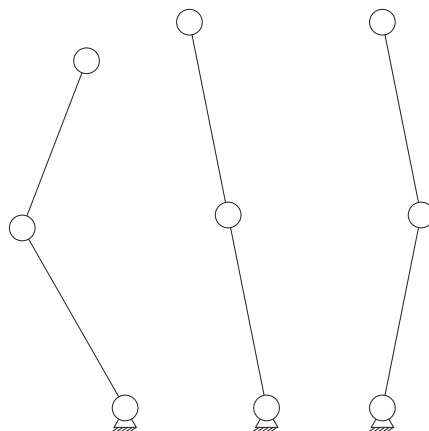
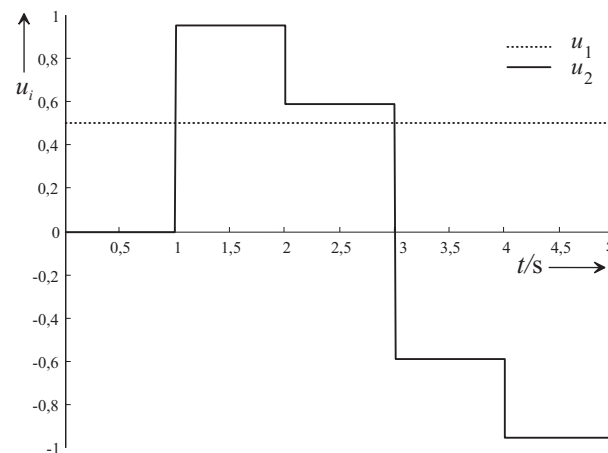


Bild 3.5: Arbeitspunktkonfigurationen des Versuchsträgers

| Arbeitspunkt | Zustandsvektor \mathbf{x}_0 | Stellgrößenvektor \mathbf{u}_0 |
|--------------|---|----------------------------------|
| 1 | $[\frac{2\pi}{18}, -\frac{2\pi}{18}, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ | $[0, 1745; -0, 1745]$ |
| 2 | $[\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{18}, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ | $[0, 1745; 0]$ |
| 3 | $[-\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{18}, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$ | $[0, 1745; 0]$ |

Tabelle 3.1: Arbeitspunkte

Entwickelt man an diesen Arbeitspunkten die entsprechenden Näherungen und implementiert dazu jeweils ein SIMULINK[®]-Modell, so können beispielsweise bei einem Eingangssignal, wie in Bild 3.6 dargestellt, die Systemantworten aufgezeichnet werden.

**Bild 3.6:** Stellsignale

Das Ergebnis ist eine graphische Darstellung der Trajektorien des physikalischen Systems, der im Zustand quadratischen Systeme und eines linearen Vergleichssystems. In den Bildern 3.7 bis 3.12 sind zunächst die elastischen Freiheitsgrade dargestellt. Es ist gerade bei Arbeitspunkt 1 (Bild 3.8) deutlich zu erkennen, daß von allen Approximationen die Tschebyscheff-Reihe das physikalische Modell gut nähert. Bei Arbeitspunkten 2 (Bild 3.10) und 3 (Bild 3.12) zeigen sich für alle Näherungen ähnlich gute Ergebnisse. Auffällig ist, daß für alle Arbeitspunkte die Näherung der elastischen Koordinate δ_{11} bei weitem nicht das Verhalten des physikalischen Modells erreicht.

Die Bilder (3.13 bis 3.18) zeigen jeweils die x - bzw. y -Koordinate des Endeffektors aufgetragen gegen die Zeit. Es weisen alle Approximationen einen qualitativ ähnlichen Verlauf. Für die Näherung des physikalischen Modells mit der Taylor-Reihe zeigen sich jedoch bei der Betrachtung des ersten Arbeitspunktes erhebliche Abweichungen, wohingegen die Tschebyscheff-Näherungen gute Ergebnisse erzielen.

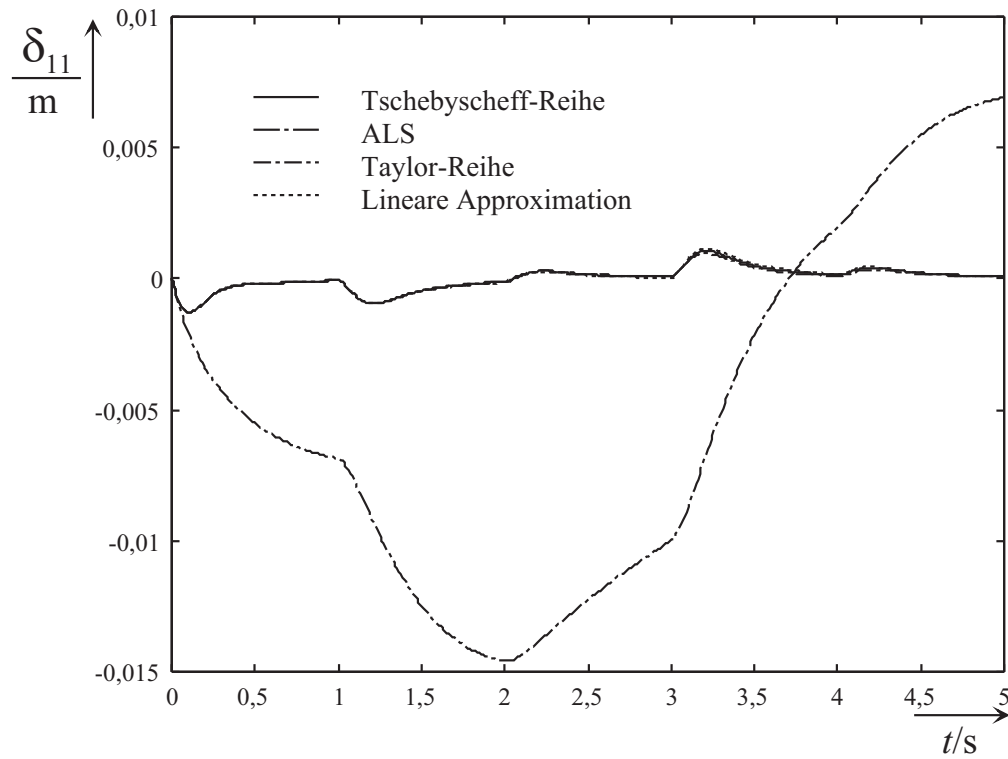


Bild 3.7: Elastischer Freiheitsgrad $\delta_{11}(l_1)$ am Arbeitspunkt 1

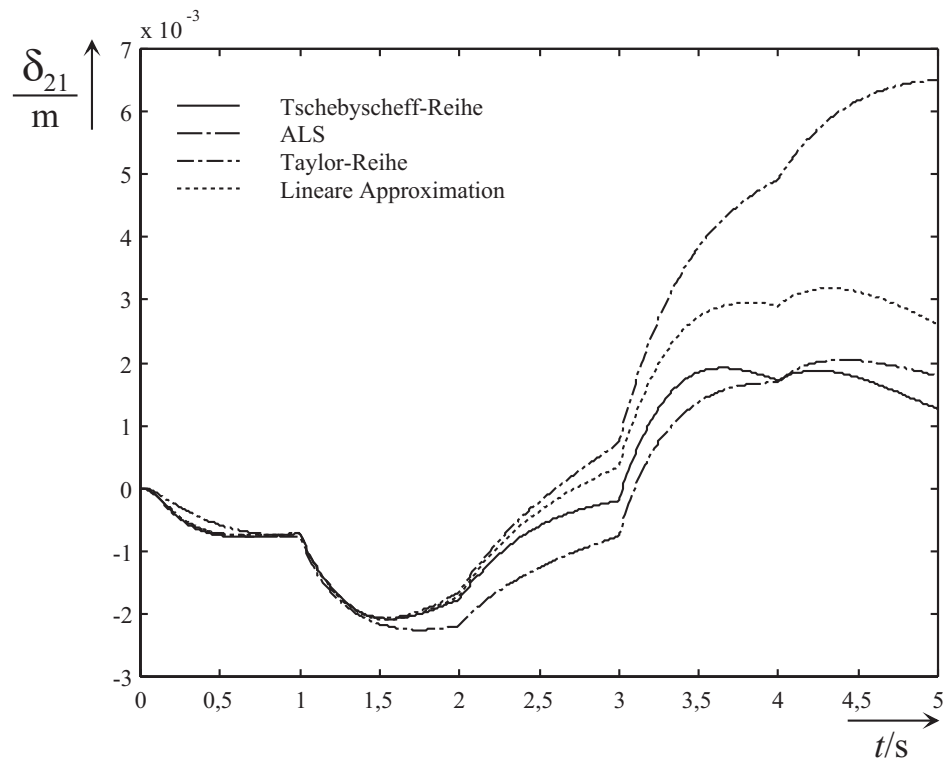


Bild 3.8: Elastischer Freiheitsgrad $\delta_{21}(l_2)$ am Arbeitspunkt 1

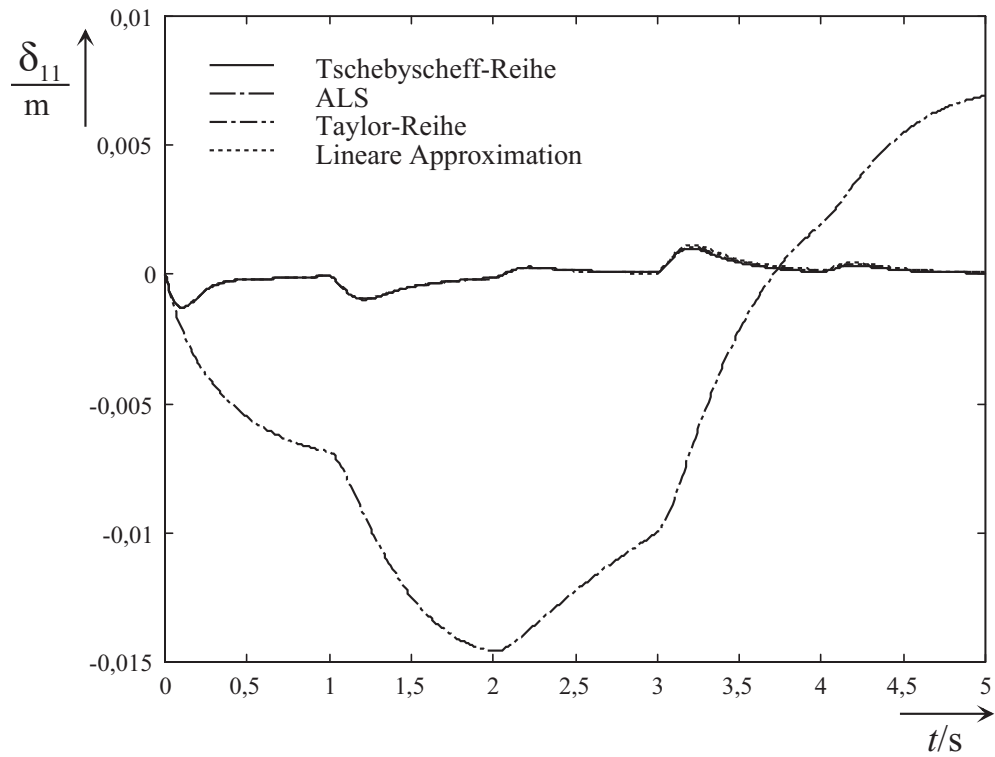


Bild 3.9: Elastischer Freiheitsgrad $\delta_{11}(l_1)$ am Arbeitspunkt 2

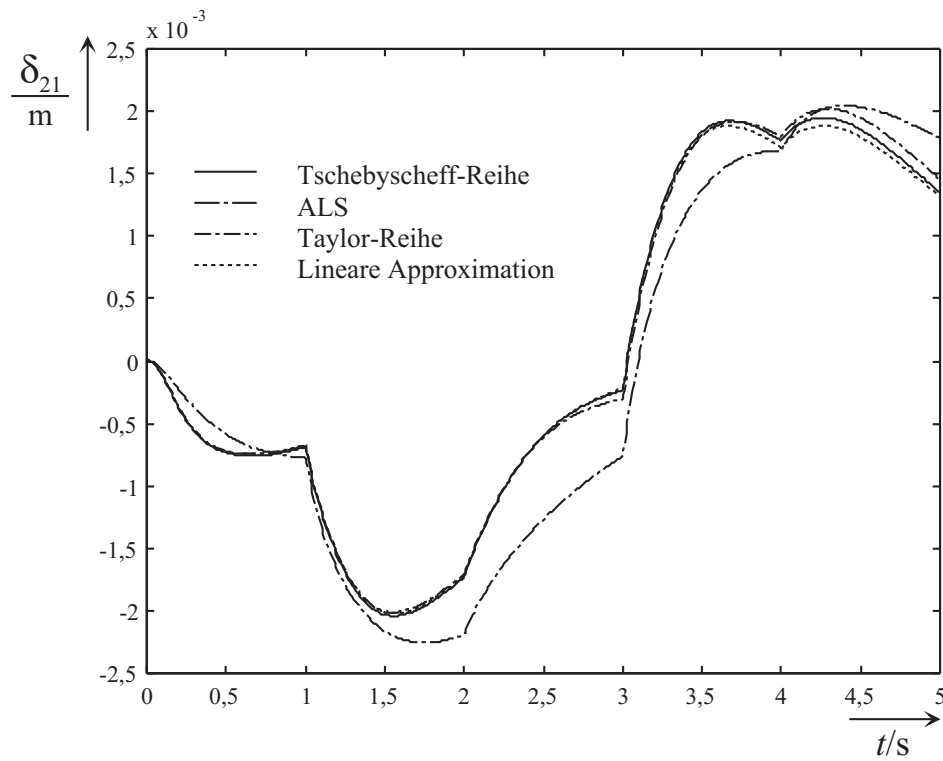


Bild 3.10: Elastischer Freiheitsgrad $\delta_{21}(l_2)$ am Arbeitspunkt 2

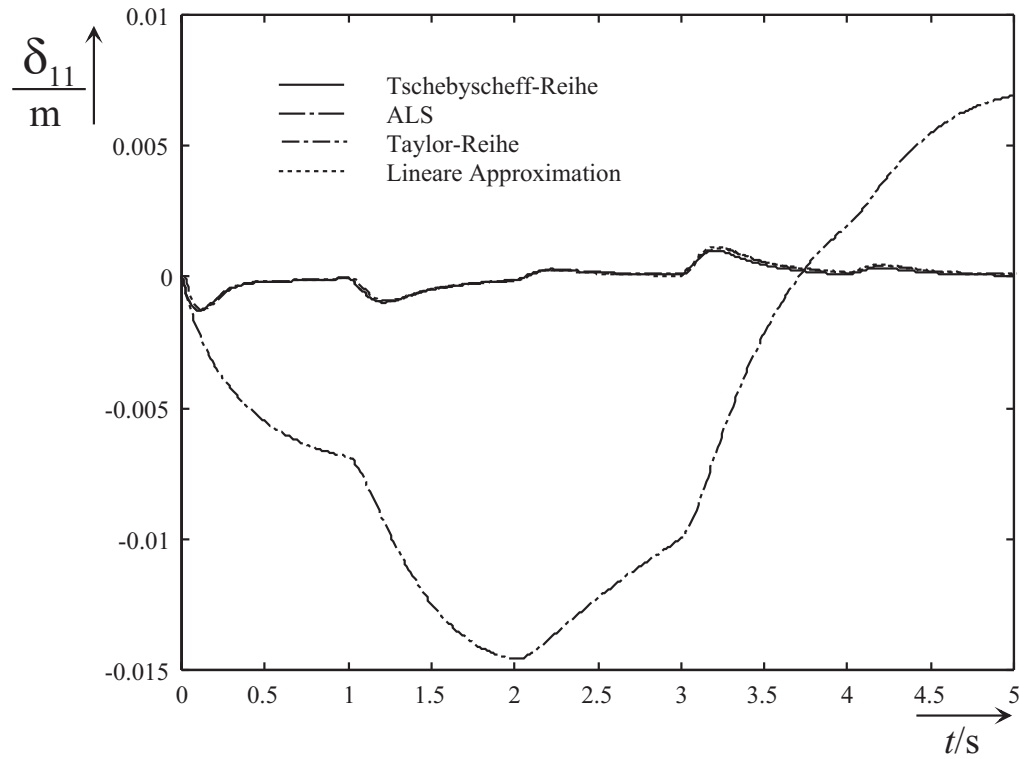


Bild 3.11: Elastischer Freiheitsgrad $\delta_{11}(l_1)$ am Arbeitspunkt 3

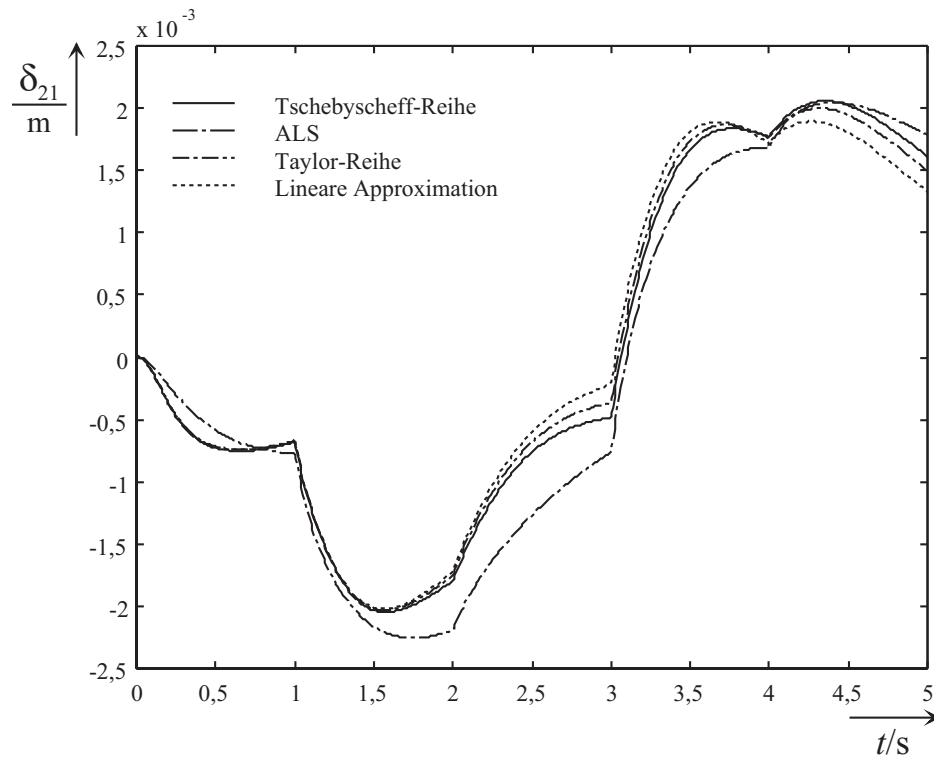


Bild 3.12: Elastischer Freiheitsgrad $\delta_{21}(l_2)$ am Arbeitspunkt 3

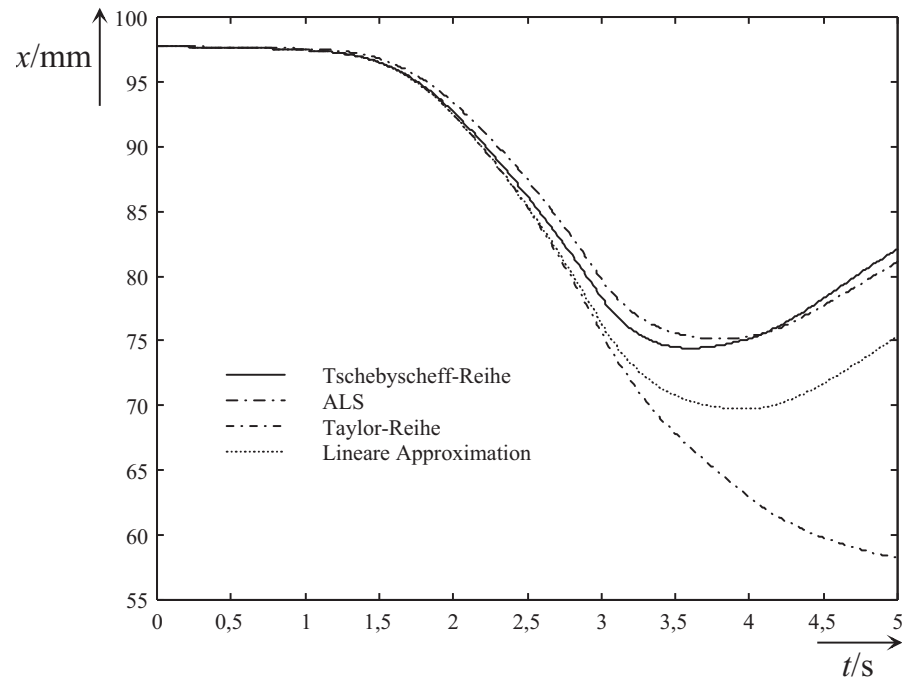


Bild 3.13: x -Koordinate für Arbeitspunkt 1

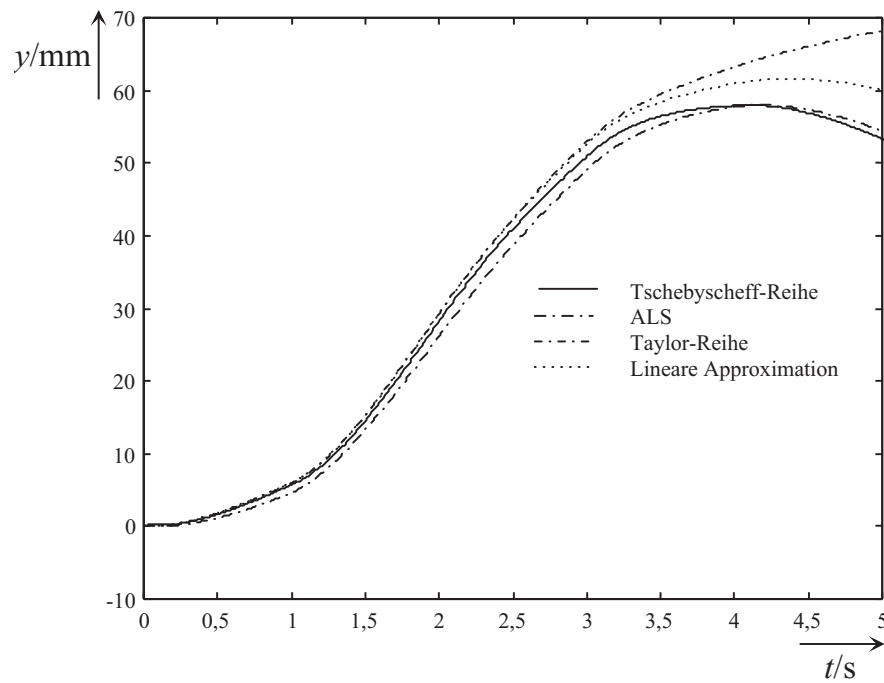


Bild 3.14: y -Koordinate für Arbeitspunkt 1

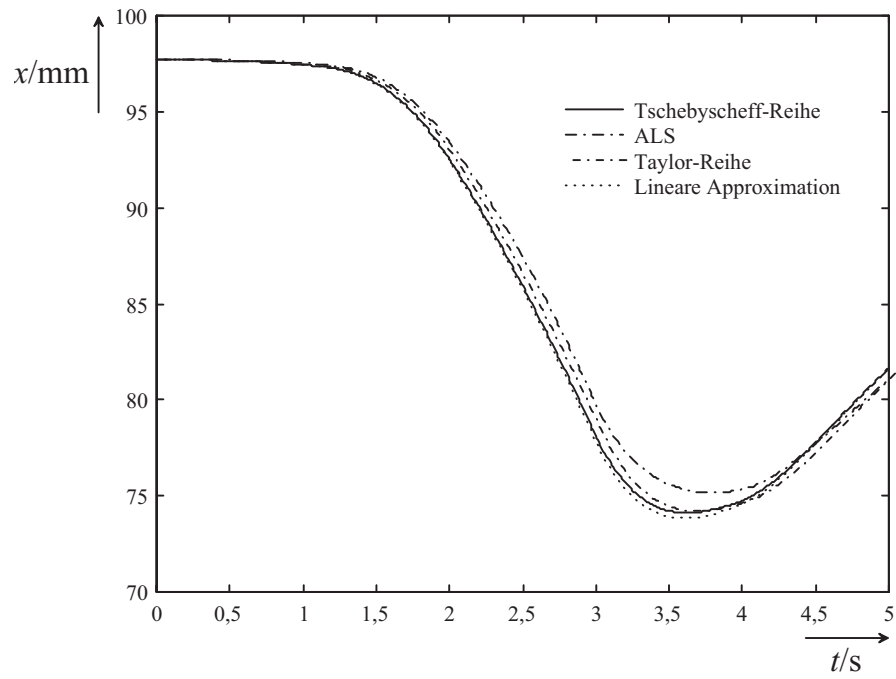


Bild 3.15: x -Koordinate für Arbeitspunkt 2

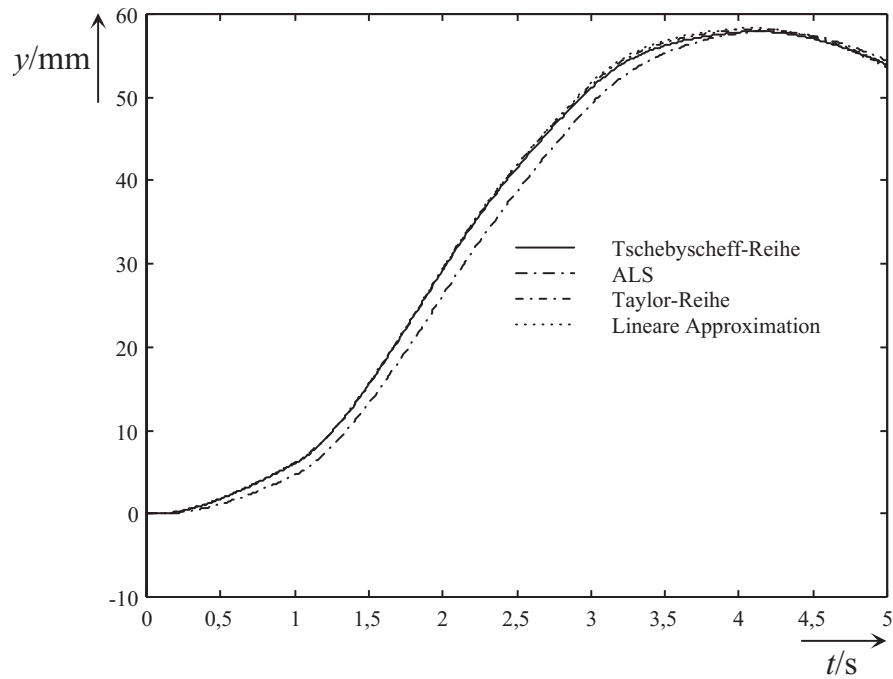


Bild 3.16: y -Koordinate für Arbeitspunkt 2

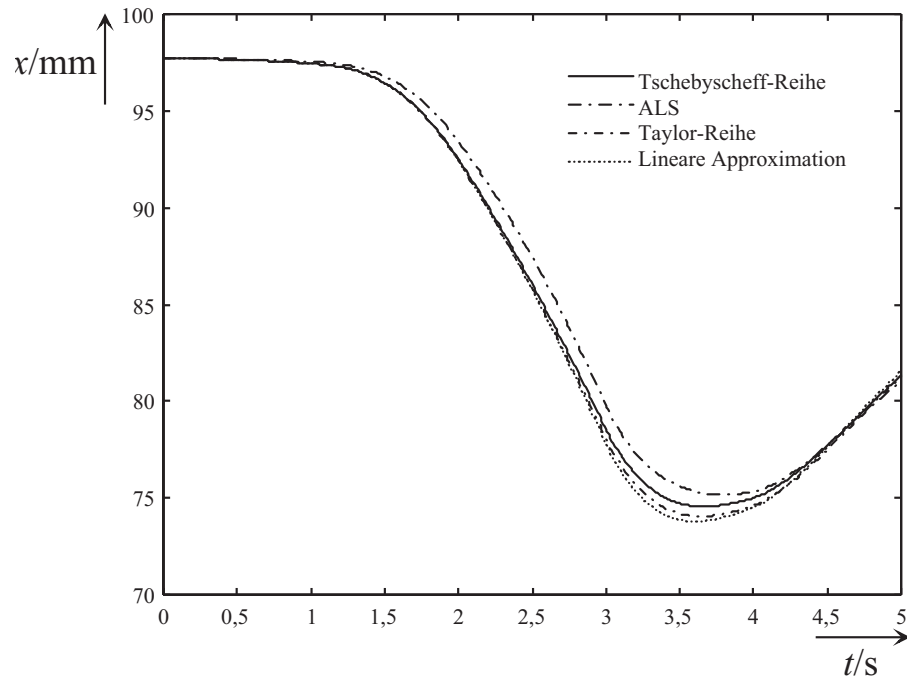


Bild 3.17: x -Koordinate für Arbeitspunkt 3

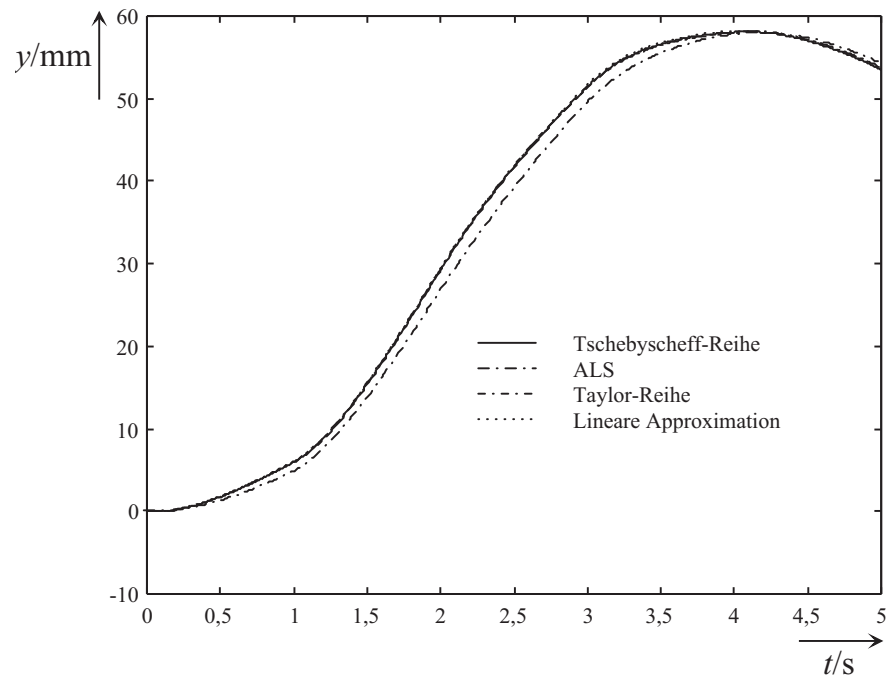


Bild 3.18: y -Koordinate für Arbeitspunkt 3

4 Zusammenfassung und Ausblick

Im vorangegangenen Bericht wird erläutert, wie das dynamische Verhalten eines physikalischen Modells mittels einer Tschebyscheff-Approximation beschrieben werden kann. Der Ausgangspunkt zu einer solchen Reihe ist die Entwicklung einer Taylor-Reihe. Tschebyscheff-Reihen zeichnen sich durch einen gleichmäßig verteilten Fehler der Näherung und durch die verbesserten Konvergenzeigenschaften aus. Mit einfachen Modifikationen ist es möglich, bestehende Polynomapproximationen ein verändertes Verhalten aufzuprägen, das sich bei der näherungsweise Beschreibung des dynamischen Verhaltens technischer Systeme als positiv erweist.

Eine Möglichkeit der Weiterentwicklung ist die Programmierung eines Software-Tools, ähnlich dem von (Spielmann und Jelali 1996) entwickelten Programm, daß es ermöglicht, die Generierung einer Tschebyscheff-Approximation zu automatisieren und diese in den allgemein bekannten Standardformen ausgeben zu lassen. Ebenfalls sinnvoll ist eine Untersuchung, inwiefern der Übergang zu einem System dritter Ordnung die Qualität der Näherung, im Vergleich Taylor-Reihe zur Tschebyscheff-Reihe, verbessert. Besonders ist hier eine Untersuchung der Tatsache interessant, welchen Einfluß die Wendepunkte der Funktionen dritter Ordnung auf das Verhalten der Näherungen haben.

5 Literatur

- Arteaga Pérez, M.** und **B. Riege.** 1997. *Zur experimentellen Modellbildung eines zweiachsigen elastischen Roboters.* Forschungsbericht 3/97. Meß-, Steuer- und Regelungstechnik. Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg.
- Bai, M.** 1996. *Modellbildung und Simulation eines zweiachsigen elastischen Handhabungssystems.* Forschungsbericht 5/96. Meß-, Steuer- und Regelungstechnik. Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg.
- Bernzen, W.** und **G. Büdding.** 1995. *Modellbildungsmöglichkeiten elastischer Handhabungssysteme.* Forschungsbericht 14/95. Meß-, Steuer- und Regelungstechnik. Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg.
- Carnahan, B., H. Luther** und **J. Wilkes.** 1969. *Applied Numerical Research.* New York: John Wiley & Sons.
- Ehlich, H.** und **K. Zeller.** 1966. Čebyšev-Polynome in mehreren Veränderlichen. *Math. Zeitschrift.* 142–143. Tübingen: Mathematisches Institut der Universität.
- Fraser, A.** und **R. Daniel.** 1991. *Perturbation Techniques for Flexible Manipulators.* Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Fromm, J.** 1975. *Tschebyscheff-Polynome in mehreren Veränderlichen.* Dissertation. Abteilung Mathematik. Universität Dortmund.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme - Systemtheoretische Grundlagen.* München: Oldenbourg.
- Schwarz, H.** 1993. *Quadratische Systeme mit linearer Steuerung (QLS).* Forschungsbericht 12/93. Meß-, Steuer- und Regelungstechnik. Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg.
- Spielmann, M.** und **M. Jelali.** 1996. *Zur rechnergestützten Approximation nichtlinearer Systeme durch Polynomsysteme.* Forschungsbericht 20/96. Meß-, Steuer- und Regelungstechnik. Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg.
- Vetter, W.** 1973. Matrix calculus operations and Taylor expansions. *SIAM Review* 15. 352–369.

A Erläuterungen

Kronecker-Produkt-Notation

Für zwei Vektoren $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ gilt nach (Spielmann und Jelali 1996):

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = [a_1 \mathbf{b}^T, a_2 \mathbf{b}^T, \dots, a_m \mathbf{b}^T]^T \in \mathbb{R}^{nm}. \quad (\text{A.1})$$

Für einen Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\mathbf{a}^{(i)} = \underbrace{\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \otimes \dots \otimes \mathbf{a}}_{i\text{-mal}}. \quad (\text{A.2})$$

Reduzierte Kronecker-Produkt-Notation Das reduzierte Kronecker-Produkt $\mathbf{x}^{[k]}$ wird nach (Spielmann und Jelali 1996) durch die Rekursionsformel

$$\mathbf{x}^{[k]} = \begin{pmatrix} x_1 b_1^{k-2} \\ x_2 b_2^{k-2} \\ \vdots \\ x_n b_n^{k-2} \end{pmatrix}, \quad k > 1 \quad (\text{A.3})$$

mit

$$\mathbf{b}_i^0 := \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_i^k := \begin{pmatrix} x_i b_1^{k-1} \\ x_{i+1} b_{i+1}^{k-1} \\ \vdots \\ x_n b_n^{k-1} \end{pmatrix}, \quad k > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.4})$$

erklärt.

B Tschebyscheff-Polynome

$$\begin{aligned}
 T_0 &= 1 \\
 T_1 &= x \\
 T_2 &= 2x^2 - 1 \\
 T_3 &= 4x^3 - 3x \\
 T_4 &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
 T_5 &= 16x^5 - 20x^3 + 5x
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
 1 &= T_0 \\
 x &= T_1 \\
 x^2 &= \frac{1}{2}(T_0 + T_2) \\
 x^3 &= \frac{1}{4}(3T_1 + T_3) \\
 x^4 &= \frac{1}{8}(3T_0 + 4T_2 + T_4) \\
 x^5 &= \frac{1}{16}(10T_1 + 15T_2 + 6T_4 + T_6) \\
 x^6 &= 0.3125 \cdot T(0, x) + 0.46875 \cdot T(2, x) + \\
 &\quad 0.1875 \cdot T(4, x) + 0.03125 \cdot T(6, x) \\
 x^7 &= 0.546875 \cdot T(1, x) + 0.328125 \cdot T(3, x) + \\
 &\quad 0.109375 \cdot T(5, x) + 0.015625 \cdot T(7, x) \\
 x^8 &= 0.2734375 \cdot T(0, x) + 0.4375 \cdot T(2, x) + 0.21875 \cdot T(4, x) \\
 &\quad + 0.21875 \cdot T(4, x) + 0.0625 \cdot T(6, x) + 0.0078125 \cdot T(8, x)
 \end{aligned} \tag{B.2}$$