Globale Analysis II

Michael Dreher
Mathematisches Institut
Universität Bonn
michael.dreher@uni-konstanz.de

Sommersemester 2008
— im Wesentlichen komplett —
(Hinweise und Verbesserungsvorschläge erwünscht)

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Ziel der Vorlesung

Im Wesentlichen wollen wir folgende Punkte behandeln:

- Pseudodifferentialoperatoren (ΨDO) auf Mannigfaltigkeiten, insbesondere elliptische ΨDO,
- deren Eigenschaften, insbesondere Spektraleigenschaften.

Was sind Pseudodifferentialoperatoren ?

Es sind Verallgemeinerungen von partiellen Differentialoperatoren (PDO). Sei $P = P(x, D_x)$ ein solcher auf dem $\mathbb{R}^n$: also

$$P(x, D_x) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D_x^\alpha,$$

wobei P die Ordnung $m \in \mathbb{N}$ habe, und die Koeffizienten a_α seien glatte Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$, die gemeinsam mit allen Ableitungen beschränkt seien, also $a_\alpha \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Weiterhin sei $D = \frac{1}{\mathrm{i}}\nabla$ mit $\mathrm{i}^2 = -1$ und $D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot D_{x_n}^{\alpha_n}$ für einen Multi-index $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Nun sei $\hat{u}(\xi)$ der Wert der Fouriertransformierten einer Funktion u, die glatt genug ist und im Unendlichen schnell genug abklingt, also

$$\hat{u}(\xi) = (\mathcal{F}_{x\to\xi} u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}_x^n} e^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} u(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dann ist $(D_x^\alpha u)\hat{}(\xi) = \xi^\alpha \hat{u}(\xi)$, wobei wir ξ^α sinngemäß genauso definieren wie D^α, also $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{\alpha_n}$. Damit können wir dann schreiben

$$\begin{aligned}(P(x, D_x)u)(x) &= \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) (\mathcal{F}_{\xi\to x}^{-1} \xi^\alpha \hat{u}(\xi))(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}_\xi^n} e^{\mathrm{i}x\xi} \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \hat{u}(\xi) \frac{\mathrm{d}\xi}{(2\pi)^n}.\end{aligned}$$

Nun setzen wir $đ\xi := (2\pi)^{-n}\,\mathrm{d}\xi$ sowie $p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$, und wir bekommen die kompakte Schreibweise

$$(P(x, D_x)u)(x) = \int_{\mathbb{R}_\xi^n} e^{\mathrm{i}x\xi} p(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,đ\xi.$$

Die Funktion p heißt *pseudodifferentielles Symbol* zum Operator P, man schreibt auch $p = \sigma(P)$. Für PDO ist dieses Symbol ein Polynom in ξ.

Die folgenden Eigenschaften sind einigermaßen offensichtlich:

- für $|\xi| \to \infty$ zeigt $p = p(x,\xi)$ ein polynomiales Wachstumsverhalten, mit einer Wachstumsordnung, die gleich der Ordnung des Operators P ist,
- Ableitungen von p nach ξ reduzieren diese Wachstumsordnung,

- Ableitungen von p nach x lassen im Allgemeinen diese Wachstumsordnung unverändert.

Die zentrale Idee beim Einführen von ΨDO ist nun: man ersetze p durch eine Funktion, die nicht unbedingt ein Polynom in ξ ist, aber trotzdem diese drei Eigenschaften erfüllt. Der dazugehörige Operator P heißt dann ΨDO.

Beispiel: Es ist $\sigma(\triangle) = -|\xi|^2$, wobei $\triangle = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$. Dieser Operator ist das Paradebeispiel für einen *elliptischen* Operator. Wir können uns $|\xi|^2$ geschrieben denken als $\xi^\top I_n \xi$, wenn ξ ein Spaltenvektor ist und I_n die Einheitsmatrix. Diese ist offensichtlich positiv definit, was die Bezeichnung *elliptisch* erklärt.

Noch etwas schöner ist $1 - \triangle$ mit dem Symbol $\sigma(1 - \triangle) = 1 + |\xi|^2$. Er ist deshalb noch schöner, weil man jetzt durch das Symbol dividieren darf, ohne Ärger bei Division durch Null zu bekommen. Dieser Operator ist dann sogar invertierbar, und wir haben $\sigma((1-\triangle)^{-1}) = \frac{1}{1+|\xi|^2}$. Und wir stellen fest, daß dies ebenfalls ein pseudodifferentielles Symbol ist, mit Wachstumsordnung -2.

Damit ist die spätere Definition von Pseudodifferentialoperatoren ein Stück weit skizziert, und es ergeben sich einige Fragen:

- Da die ΨDO eine Verallgemeinerung der PDO sein sollen: welche der typischen Eigenschaften von PDO gelten auch noch für ΨDO ? (Abbildungseigenschaften zwischen Sobolevräumen, adjungierte Operatoren und komponierte Operatoren sind wieder Operatoren vom selben Typ, Spektraleigenschaften)

- Was sind die Vorteile ? (Einen können wir schon erahnen: wie aus dem Beispiel ersichtlich, werden die inversen Operatoren (soweit vorhanden) zu elliptischen PDOn vermutlich ΨDOn mit negativer Ordnung sein)

- Wie kann man ΨDO auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sinnvoll definieren (eine Schwierigkeit besteht in der Definition von $\hat{u}$, falls u nur auf einem Teil des $\mathbb{R}^n$ gegeben ist)

- Wie kann man ΨDO auf Mannigfaltigkeiten definieren ?

- Wie weit kann man ΨDO sinnvoll verallgemeinern ? (das wird uns zu Fourierintegraloperatoren (FIO) führen, als Lösungsoperatoren für hyperbolische Differentialgleichungen).

Noch ein Wort zur Literatur: die Vorlesung orientiert sich an Kapitel 1 aus Shubin [13]. Die Standardreferenz ist Hörmander [8], wenn auch nicht ganz leicht zu lesen.

Kapitel 2

Begriffe aus der Distributionentheorie

Dieses Kapitel orientiert sich an [8]. Eine gut lesbare Darstellung ist in [22], und ein anderer (und vom funktionalanalytischen Gesichtspunkt m.M.n. reizvoller) Zugang findet sich in [11]. Siehe auch [20] und [21].

2.1 Testfunktionen und Distributionen

In diesem Kapitel ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet (also offen und zusammenhängend), nicht unbedingt beschränkt. Für den Rand $\partial\Omega$ setzen wir nichts in Bezug auf Glattheit voraus.

Wir brauchen noch eine Definition:

Definition 2.1. *Seien A und B Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Wir schreiben $A \Subset B$, wenn der Abschluß von A im Innern von B enthalten ist.*

Man beachte, daß die Mengen A und B beide unbeschränkt sein können. Wenn man sich die Menge A also kompakt wünscht, soll man das zusätzlich fordern.

Nach dieser Vorbereitung können wir jetzt loslegen:

Definition 2.2 (Testfunktionenraum $\mathcal{D}(\Omega)$). *Wir setzen*

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u\colon \Omega \to \mathbb{C}\colon u \textit{ ist unendlich oft differenzierbar, } \operatorname{supp} u \Subset \Omega,\ \operatorname{supp} u \textit{ kompakt }\}$$

und schreiben auch $\mathcal{D}(\Omega) := C_0^\infty(\Omega)$. In diesem Raum definieren wir eine Konvergenz wie folgt: wir sagen, daß eine Folge $(\varphi_j)_{j\to\infty}$ gegen φ im Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ konvergiert, wenn es ein Kompaktum $K \Subset \Omega$ gibt mit $\operatorname{supp}\varphi_j \subset K$ *für alle j, und*

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in K} |\partial_x^\alpha(\varphi_j(x) - \varphi(x))| = 0$$

für alle Multi-indizes $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Diese Konvergenz schreiben wir auch als

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \quad (j \to \infty).$$

Offensichtlich ist $\mathcal{D}(\Omega)$ ein $\mathbb{C}$–Vektorraum.

Nun können wir Distributionen definieren:

Definition 2.3 (Distributionenraum $\mathcal{D}'(\Omega)$). *Die Menge*

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T\colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}\colon T \textit{ ist linear und folgenstetig}\}$$

heißt Raum der Distributionen über Ω.

Hierbei bedeutet Linearität natürlich $T(\alpha\varphi+\beta\psi) = \alpha T(\varphi)+\beta T(\psi)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und alle $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$; und die Folgenstetigkeit bedeutet, daß $\lim_{j\to\infty} T(\varphi_j) = T(\varphi)$ für alle Folgen $(\varphi_j)_{j\to\infty}$ mit

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \quad (j \to \infty).$$

Man sieht schnell, daß auch $\mathcal{D}'(\Omega)$ ein $\mathbb{C}$–Vektorraum ist.

Eine äquivalente (was wir nicht beweisen werden) Definition ist:

Definition 2.4 (Distributionenraum $\mathcal{D}'(\Omega)$). *Eine lineare Abbildung $T\colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ heißt Distribution, wenn gilt: für jedes Kompaktum $K \Subset \Omega$ gibt es Konstanten $C \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ mit*

$$|T(\varphi)| \le C\,\|\varphi\|_{C_b^k(K)} \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \qquad \operatorname{supp}\varphi \subset K.$$

Wenn für alle Kompakta K dieselbe Zahl k gewählt werden kann, dann heißt die kleinste solche Zahl k Ordnung *von T.*

Beispiel: Sei $f \in C(\Omega)$ und $T(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Man beachte, daß f auf dem Rand von Ω beliebig starke Polstellen haben kann. Offensichtlich reicht auch $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ als Voraussetzung, das heißt: $f \in L^1(K)$ für jedes Kompaktum $K \Subset \Omega$.

Beispiel: Sei $x_0 \in \Omega$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Setze $T(\varphi) = (\partial_x^\alpha\varphi)(x_0)$ für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Beispiel: Sei $(x_1, x_2, \dots)$ eine Folge in Ω mit Grenzwert auf dem Rand $\partial\Omega$. Sei $(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots)$ eine Folge von Multi-indizes, und sei $(a_1, a_2, \dots)$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Setze

$$T(\varphi) = \sum_{j=1}^\infty a_j(\partial_x^{\alpha^{(j)}}\varphi)(x_j), \qquad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Für ein festes φ enthält diese Summe nur endlich viele Summanden $\neq 0$. Die Folge der $|\alpha^{(j)}|$ darf unbeschränkt sein; dann ergibt sich eine Distribution unendlicher Ordnung.

Jede Funktion $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ erzeugt eine Distribution T_f gemäß der Formel $T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$. Dieses Konzept ist so wichtig, daß man einen eigenen Namen dafür gewählt hat: man spricht von *regulären Distributionen*. Diese Zuordnung ist injektiv in folgendem Sinne: wenn $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, dann ist $f = g$ im $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, das heißt, daß f und g überall (bis auf eine Nullmenge) den gleichen Wert annehmen.

In diesem Sinne betrachten wir Distributionen als verallgemeinerte Funktionen.

Satz 2.5 (Dirac–Distribution). *Sei $0 \in \Omega$. Sei $f \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ und $f(x) \ge 0$ für alle $x \in \Omega$. Wir setzen*

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \qquad \varepsilon > 0.$$

Dann ist $\lim_{\varepsilon\to+0} \int_\Omega f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0)$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Die Distribution, die eine Testfunktion φ auf ihren Wert an der Stelle $x = 0$ abbildet, heißt Delta-Distribution von Dirac. Wir beobachten, daß diese Distribution „angenähert“ werden kann durch eine Folge von regulären Distributionen. Zunächst sollten wir aber die Konvergenz von Distributionen definieren:

Definition 2.6 (Konvergenz in $\mathcal{D}'$). *Eine Folge $(T_1, T_2, \dots)$ von Distributionen konvergiert gegen ein $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, wenn $\lim_{j\to\infty} T_j(\varphi) = T(\varphi)$ für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt.*

Das heißt also, daß der Vektorraum $\mathcal{D}'(\Omega)$ mit der schwach-$*$-Topologie ausgestattet wird.

Im Sinne dieser Definition wird also die δ–Distribution durch eine Folge regulärer Distributionen angenähert, deren darstellende Funktionen f_ε Graphen haben, die mit schrumpfenden ε immer schmaler und höher werden. Daher rührt die Physiker-Sprechweise „die Delta-Funktion ist überall gleich Null, bloß im Ursprung hat sie den Wert ∞, aber ihr Integral über den gesamten Raum ist gleich eins“, der wir uns aus naheliegenden Gründen nicht anschließen werden.

Es ist übrigens der Normalfall, daß eine Distribution angenähert werden kann durch reguläre Distributionen:

Satz 2.7. *Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dann existiert eine Folge $(T_1, T_2, \dots) \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $\lim_{j\to\infty} T_j = T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, also*

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega T_j(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = T(\varphi), \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Man sagt auch, daß $\mathcal{D}(\Omega)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ (folgen-)dicht liegt.

Beweis. Siehe [8], Band 1, Theorem 4.1.5. $\square$

2.2 Träger von Distributionen

Für herkömmliche Funktionen f ist es interessant zu wissen,

- wo nichttriviale Werte sind (Träger von f, $\operatorname{supp} f$),
- wo Singularitäten sind (singulärer Träger von f, $\operatorname{sing-supp} f$).

Hierbei sagen wir, daß eine Funktion in einem Punkt eine Singularität hat, wenn sie dort nicht unendlich oft differenzierbar ist.

Diese Begriffe wollen wir auch für Distributionen definieren; und zwar auf eine solche Weise, daß bei regulären Distributionen genau der herkömmliche Begriff entsteht.

Definition 2.8 (Träger $\operatorname{supp} T$). *Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Wir sagen, daß ein Punkt $x_0 \in \Omega$ zum Träger von T gehört ($x_0 \in \operatorname{supp} T$), wenn für jede offene Umgebung $U \subset \Omega$ von x_0 eine Funktion $\varphi \in C_0^\infty(U)$ existiert mit $T(\varphi) \neq 0$.*

Man kann auch definieren: $x_0 \notin \operatorname{supp} T$ genau dann, wenn es eine offene Umgebung U von x_0 gibt mit $U \subset \Omega$ und $T(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(U)$.

Definition 2.9 (Singulärer Träger $\operatorname{sing-supp} T$). *Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Wir sagen, daß ein Punkt $x_0 \in \Omega$* **nicht** *zum singulären Träger gehört ($x_0 \notin \operatorname{sing-supp} T$), wenn es eine offene Umgebung $U \subset \Omega$ von x_0 und eine Funktion $f \in C^\infty(U)$ gibt mit $T(\varphi) = \int_U f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(U)$.*

Das bedeutet: in einer Umgebung von x_0 ist T identisch zu einer regulären Distribution, die von einer C^∞–Funktion erzeugt wird.

Dementsprechend ist dann $x \in \operatorname{sing-supp} T$ genau dann, wenn es keine offene Umgebung U von x_0 gibt, sodaß die Einschränkung von T auf U gleich einer C^∞–Funktion ist.

Hierbei ist die Einschränkung T_U von T auf U definiert durch $T_U(\varphi) := T(\varphi)$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(U) \subset C_0^\infty(\Omega)$.

Wenn nun $P = P(x, D_x) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ ein PDO mit Koeffizienten $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ ist, dann gilt offensichtlich für jede Funktion $u \in C^m(\Omega)$ die Beziehung

$$\operatorname{sing-supp}(Pu) \subseteq \operatorname{sing-supp} u.$$

Die Theorie der ΨDO wird uns später liefern, daß sogar die Gleichheit gilt, wenn P ein *elliptischer* PDO ist.

Man sieht nach einem scharfen Blick auf die Definitionen: $\Omega \setminus \operatorname{supp} T$ ist eine offene Menge, und $\Omega \setminus \operatorname{sing-supp} T$ ist auch eine offene Menge. Also sind $\operatorname{supp} T$ und $\operatorname{sing-supp} T$ abgeschlossene Mengen in der induzierten Topologie auf Ω, was der Erwartung entspricht, daß der Träger einer Funktion abgeschlossen sein sollte.

Definition 2.10 (Topologie im Testfunktionenraum $\mathcal{E}$). *Wir setzen $\mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$, ausgestattet mit der von den Halbnormen*

$$\varphi \mapsto \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in K} |\partial_x^\alpha \varphi(x)|$$

erzeugten lokalkonvexen Topologie, wobei $m \in \mathbb{N}$ und $K \Subset \Omega$ alle Kompakta durchläuft.

Definition 2.11 (Distributionenraum $\mathcal{E}'(\Omega)$). *Wir setzen*

$$\mathcal{E}'(\Omega) = \{T \in \mathcal{D}'(\Omega)\colon\ \operatorname{supp} T \Subset \Omega, \quad \operatorname{supp} T \text{ kompakt } \}.$$

Die Elemente von $\mathcal{E}'(\Omega)$ heißen Distributionen mit kompaktem Träger*.*

Wir wollen $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ anwenden auf $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. Achtung: meist ist $\varphi \notin C_0^\infty(\Omega)$.
Dazu wählen wir kompakte Mengen K_1 und K_2 mit

$$\operatorname{supp} T \Subset K_1 \Subset K_2 \Subset \Omega,$$

und wir wählen eine sogenannte Abschneidefunktion $\psi = \psi(x)$ mit $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $\operatorname{supp}\psi \subset K_2$ sowie $\psi \equiv 1$ auf K_1. Dann setzen wir

$$T(\varphi) := T(\psi\varphi), \qquad \varphi \in C^\infty(\Omega),$$

wobei wir die rechte Seite als Paarung von $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $\psi\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ verstehen.
Diese Konstruktion liefert uns einen Wert, der von ψ sowie den Kompakta K_1 und K_2 nicht abhängt. Denn seien $\tilde{K}_1$, $\tilde{K}_2$ andere Kompakta, und sei $\tilde{\psi}$ eine andere Abschneidefunktion (mit denselben Eigenschaften wie oben angegeben), dann ist

$$T(\tilde{\psi}\varphi) = T(\psi\varphi),$$

aufgrund von $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp}(\tilde{\psi}\varphi - \psi\varphi) = \emptyset$.
In diesem Sinne erzeugt $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ eine lineare Abbildung von $\mathcal{E}(\Omega)$ nach $\mathbb{C}$.

Satz 2.12. *Der Vektorraum $\mathcal{E}'(\Omega)$ ist gleich dem topologischen Dual zu $\mathcal{E}(\Omega)$.*

Beweis. Wir untersuchen die Topologie von $\mathcal{E}(\Omega$ genauer. Bei der Konstruktion der Halbnormen können wir uns auf abzählbar viele Kompakta $K \Subset \Omega$ beschränken, z.B. der Gestalt

$$K_j = \left\{x \in \Omega\colon |x| \le j,\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \ge \frac{1}{j}\right\}, \qquad j \in \mathbb{N}_+.$$

Dann haben wir es mit abzählbar vielen Halbnormen zu tun, die die Topologie erzeugen. Offensichtlich ist dann $\mathcal{E}(\Omega)$ ein Fréchet-Raum[1], und die Begriffe „stetig“ und „folgenstetig“ sind äquivalent.
Wir wollen zeigen:

- wenn $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, dann ist T eine lineare und stetige Abbildung von $\mathcal{E}(\Omega)$ nach $\mathbb{C}$,
- wenn $T\colon \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbb{C}$ linear und stetig ist, dann ist $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$.

Zum ersten Punkt:
Sei $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Dann ist $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $\operatorname{supp} T \Subset \Omega$. Und wir haben $T(\varphi) := T(\psi\varphi)$ für ein $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, das nur von T abhängt. Weiterhin haben wir kompakte Mengen K_1 und K_2 mit $\operatorname{supp} T \Subset K_1 \Subset K_2 \Subset \Omega$ sowie $\operatorname{supp}\psi \subset K_2$, $\psi \equiv 1$ auf K_1. Die Linearität von T ergibt sich aus der Definition der Wirkung von T auf φ.

Bleibt die Stetigkeit zu zeigen. Sei nun $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi$ für $j \to \infty$ mit Funktionen $\varphi_j \in \mathcal{E}(\Omega)$. Das bedeutet $p_m(\varphi_j - \varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ für jede Halbnorm p_m von $\mathcal{E}(\Omega)$. Mit obigem ψ ist dann

$$\psi\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{E}} \psi\varphi \quad (j \to \infty)$$

sowie

$$\psi\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi\varphi \quad (j \to \infty).$$

Weil $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, ist dann auch

$$T(\psi\varphi_j) \xrightarrow{\mathbb{C}} T(\psi\varphi) \quad (j \to \infty).$$

[1] Es wäre schön, wenn $\mathcal{D}(\Omega)$ auch ein Fréchet-Raum wäre, aber dem ist nicht so. Immerhin sind auch in $\mathcal{D}(\Omega)$ die Begriffe „stetig“ und „folgenstetig“ gleichbedeutend.

Zum zweiten Punkt:

Sei $T\colon \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbb{C}$ linear und stetig, also auch folgenstetig. Wir zeigen: $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $\operatorname{supp} T \Subset \Omega$ sowie die Kompaktheit von $\operatorname{supp} T$.

Sei jetzt also $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, insbesondere also $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K \Subset \Omega$ für alle j und ein Kompaktum K. Dann ist

$$p_m(\varphi_j - \varphi) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 \quad (j \to \infty)$$

für jede Halbnorm p_m von $\mathcal{E}(\Omega)$, also auch

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi \quad (j \to \infty),$$

und damit ist dann $T(\varphi_j) \xrightarrow{\mathbb{C}} T(\varphi)$ für $j \to \infty$, weil die Abbildung $T\colon \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbb{C}$ stetig ist nach Voraussetzung. Also ist $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Jetzt untersuchen wir $\operatorname{supp} T$. Diese Menge ist abgeschlossen in Ω.

Angenommen, $\operatorname{supp} T$ wäre unbeschränkt (das ist nur möglich, wenn auch Ω unbeschränkt ist). Dann finden wir unendlich viele offene Umgebungen $U_1, U_2, \dots$, mit Radius $\le \frac{1}{10}$ und Abstand der Mittelpunkte ≥ 1, die in Ω sind, und deren jeweiliger Mittelpunkt in $\operatorname{supp} T$ enthalten ist. Zu jeder solchen Kugel U_j existiert eine Funktion $\varphi_j \in C_0^\infty(U_j)$ mit $T(\varphi_j) = 1$. Dann ist $\varphi(x) = \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x)$ eine Funktion aus $C^\infty(\Omega)$; für jedes $x \in \Omega$ hat diese Reihe höchstens einen Summanden ungleich 0. Diese Reihe konvergiert in der Topologie von $\mathcal{E}(\Omega)$, weil ein beliebiges Kompaktum innerhalb Ω nur endlich viele solche Kugeln U_j enthalten kann. Aber $T(\varphi)$ wäre gleich $\sum_{j=1}^\infty T(\varphi_j) = \infty$. Das kann nicht sein.

Angenommen, $\operatorname{supp} T$ würde bis an $\partial\Omega$ „heranreichen“. Dann finden wir wieder unendlich viele offene Umgebungen U_j innerhalb Ω, deren Radienfolge nach 0 konvergiert, deren Mittelpunkte in $\operatorname{supp} T$ enthalten sind, und deren Mittelpunktsfolge einen Grenzwert auf dem Rand $\partial\Omega$ hat, sodaß diese Kugeln sich nicht überlappen. Dann sind in jedem Kompaktum $K \Subset \Omega$ nur endlich viele U_j enthalten. Zu jedem U_j finden wir ein $\varphi_j \in C_0^\infty(U_j)$ mit $T(\varphi_j) = 1$. Wir setzen wie zuvor $\varphi(x) = \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x)$ mit Konvergenz in $\mathcal{E}(\Omega)$. Dann ist $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ aber $T(\varphi) = \infty$. Das kann auch nicht sein.

Also ist $\operatorname{supp} T$ beschränkt, und es ist $\operatorname{supp} T \Subset \Omega$. □

Gelegentlich nützlich ist folgende Eigenschaft:

Satz 2.13. *Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ eine Distribution der Ordnung k mit Träger* $\operatorname{supp} T = \{x_0\} \in \Omega$. *Dann gibt es Zahlen $a_\alpha \in \mathbb{C}$ für $|\alpha| \le k$, sodaß*

$$T(\varphi) = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha (\partial_x^\alpha \varphi)(x_0), \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Beweis. Siehe [8], Band 1, Theorem 2.3.4. □

2.3 Operationen für Distributionen

Wir haben bisher nur wenige Operationen in $\mathcal{D}'(\Omega)$: Addition und Multiplikation mit Zahlen.

Im Folgenden ergänzen wir:

- Multiplikation mit Funktionen aus $C^\infty(\Omega)$,
- Differentiation.

Dabei wollen wir die Definition so gestalten, daß wir den herkömmlichen Begriff wieder gewinnen, wenn die fragliche Distribution eine reguläre Distribution sein sollte, die von einer glatten Funktion erzeugt wird.

Wir erinnern uns: zu $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ existiert eine Folge $(T_1, T_2, \dots) \subset C_0^\infty(\Omega)$, sodaß

$$T(\varphi) = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega T_j(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

In diesem Sinne ist $T_j \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$ für $j \to \infty$. Wir räumen ein, daß wir an dieser Stelle die Distribution (als Abbildung von $\mathcal{D}$ nach $\mathbb{C}$) und die diese Distribution erzeugende Funktion (als Abbildung von Ω nach $\mathbb{C}$) mit demselben Buchstaben T_j bezeichnen, in der Erwartung, daß keine Konfusion entsteht. Bei dieser doppelsinnigen Schreibweise bleiben wir bis vor Definition 2.16.

Für eine Funktion $a = a(x) \in C^\infty(\Omega)$ wollen wir $aT \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definieren. Dabei wünschen wir uns $(aT_j) \xrightarrow{\mathcal{D}'} aT$ für $j \to \infty$. Das ist gleichbedeutend zu

$$(aT_j)(\varphi) \xrightarrow{\mathbb{C}} (aT)(\varphi), \quad (j \to \infty), \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wegen $aT_j \in C_0^\infty(\Omega)$ können wir allerdings die linke Seite umformen zu

$$(aT_j)(\varphi) = \int_\Omega a(x)T_j(x) \cdot \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega T_j(x) \cdot a(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = T_j(a\varphi) \xrightarrow{\mathbb{C}} T(a\varphi) \quad (j \to \infty).$$

Also legen wir fest:

Definition 2.14 (Multiplikation von Funktion und Distribution). *Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $a \in C^\infty(\Omega)$. Dann wird eine Distribution $aT \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definiert als*

$$(aT)(\varphi) := T(a\varphi), \qquad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Bemerkung 2.15. *Das Produkt aT läßt sich auch definieren für $a, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ unter der Voraussetzung* $\operatorname{sing-supp} a \cap \operatorname{sing-supp} T = \emptyset$. *Ohne diese Voraussetzung wird es schwierig: Man kann zeigen, daß es unmöglich ist, eine Multiplikation von Distributionen zu definieren, bei der das Assoziativgesetz gilt, und die im Falle von Funktionen mit der üblichen Multiplikation übereinstimmt. Ein (teilweiser) Ausweg aus dieser Situation sind die* Colombeau*–Algebren, auf die wir hier aber nicht eingehen wollen.*

Als nächstes wollen wir $\partial_x^\alpha T$ definieren. Wenn T eine glatte Funktion sein sollte, dann soll dies natürlich mit der klassischen Ableitung übereinstimmen. Also ist unser Wunsch wieder $\partial_x^\alpha T_j \xrightarrow{\mathcal{D}'} \partial_x^\alpha T$, was gleichbedeutend ist mit

$$(\partial_x^\alpha T_j)(\varphi) \xrightarrow{\mathbb{C}} (\partial_x^\alpha T)(\varphi), \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Und wieder können wir die linke Seite umformen (mittels partieller Integration) zu

$$(\partial_x^\alpha T_j)(\varphi) = \int_\Omega (\partial_x^\alpha T_j(x))\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega T_j(x)(\partial_x^\alpha \varphi(x))\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} T_j(\partial_x^\alpha \varphi) \xrightarrow{\mathbb{C}} (-1)^{|\alpha|} T(\partial_x^\alpha \varphi).$$

Also legen wir fest:

Definition 2.16 (Ableitung von Distributionen). *Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Dann wird eine Distribution $\partial_x^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definiert als*

$$(\partial_x^\alpha T)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} T(\partial_x^\alpha \varphi), \qquad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Bemerkung 2.17. *Es ist $\partial_x^\alpha \partial_x^\beta T = \partial_x^\beta \partial_x^\alpha T$.*

Satz 2.18. *Die Abbildungen $T \mapsto aT$ und $T \mapsto \partial_x^\alpha T$ sind linear und stetig als Abbildungen von $\mathcal{D}'(\Omega)$ nach $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Beweis. Folgt direkt aus Satz A.35. □

Beispiel 2.19. *Sei $H\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ die* Heaviside*–Funktion, definiert als*

$$H(x) = \begin{cases} 1\colon x > 0, \\ 0\colon x \leq 0. \end{cases}$$

Dann ist $H' = \delta$.

Man kann auch $H(0) = 1$ definieren und bekommt ebenfalls $H' = \delta$.

2.4 Fouriertransformationen

Wir brauchen noch einen weiteren Raum von Testfunktionen.

Definition 2.20 (Schwartz–Raum). *Die Menge*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \colon \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial_x^\beta \varphi(x) \right| < \infty \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \right\}$$

heißt Schwartz–Raum der schnell fallenden Funktionen.

Offensichtlich ist dies ein $\mathbb{C}$–Vektorraum, dessen Topologie von den in der Definition genannten Halbnormen erzeugt wird, sogar ein Fréchet–Raum.

Definition 2.21 (Fourier–Transformation). *Für eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die Fouriertransformierte von f als*

$$\hat{f}(\xi) = (\mathcal{F}_{x \to \xi} f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n_x} e^{-\mathrm{i}x\xi} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Man beachte, daß dieses Integral (entgegen der Meinung einiger Physiker) nicht existieren muß, wenn $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Satz 2.22. *Die Fouriertransformation ist linear und stetig als Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Es ist*

$$\left(D_{x_j} f\right)\hat{}\,(\xi) = \xi_j \hat{f}(\xi), \qquad (x_j f)\hat{}\,(\xi) = -D_{\xi_j} \hat{f}(\xi), \qquad j = 1, \ldots, n, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Satz 2.23 (Inverse Fouriertransformation). *Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist*

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}x\xi} \hat{\varphi}(\xi) \frac{\mathrm{d}\xi}{(2\pi)^n}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Wir wollen zeigen, daß

$$(2\pi)^n \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \left(\int_{\mathbb{R}^n_y} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} \varphi(y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}\xi,$$

für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$. Leider konvergiert das Integral rechts nicht absolut, sodaß die Reihenfolge der Integrale nicht getauscht werden kann.

Wir wählen eine Funktion $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}x\xi} \hat{\varphi}(\xi) \psi(\xi) \, \mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \left(\int_{\mathbb{R}^n_y} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} \varphi(y) \, \mathrm{d}y \right) \psi(\xi) \, \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_y} \varphi(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} \psi(\xi) \, \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_y} \varphi(y) \hat{\psi}(y - x) \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_y} \varphi(x + y) \hat{\psi}(y) \, \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Nun nehmen wir $\psi(\varepsilon\xi)$ mit einem positiven ε anstatt $\psi(\xi)$. Dann ist die Fouriertransformierte $\hat{\psi}(y)$ zu ersetzen durch $\varepsilon^{-n}\hat{\psi}(y/\varepsilon)$. Somit folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}x\xi} \hat{\varphi}(\xi) \psi(\varepsilon\xi) \, \mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{R}^n_y} \varphi(x + y) \varepsilon^{-n} \hat{\psi}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}y \qquad (2.1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_y} \varphi(x + \varepsilon y) \hat{\psi}(y) \, \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Wir schicken ε nach $+0$ und wenden den Konvergenzsatz von Lebesgue an. Dann folgt

$$\psi(0)\int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}x\xi}\hat\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \varphi(x)\int_{\mathbb{R}^n_y}\hat\psi(y)\,\mathrm{d}y.$$

Jetzt können wir ψ wählen: sei $\psi(\xi) = \exp(-\frac{1}{2}|\xi|^2)$. Dann ist $\psi(0) = 1$ und $\hat\psi(y) = (2\pi)^{n/2}\exp(-\frac{1}{2}|y|^2)$, sowie $\int_{\mathbb{R}^n_y}\hat\psi(y)\,\mathrm{d}y = (2\pi)^n$.

Die Fouriertransformierte von ψ läßt sich für $n = 1$ recht schnell bestimmen, indem man die Differentialgleichung $\partial_y\hat\psi(y) = -y\hat\psi(y)$ beweist und $\hat\psi(0)$ bestimmt. □

Als Folgerung ergibt sich sofort, daß die Fouriertransformation ein Isomorphismus von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist.

Aus (2.1) bekommt man mit $x = 0$ direkt

$$\int_{\mathbb{R}^n}\hat\varphi\psi\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi\hat\psi\,\mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

Weitere Gleichungen, die man leicht nachweisen kann, sind

$$\int_{\mathbb{R}^n_x}\varphi(x)\overline{\psi(x)}\,\mathrm{d}x = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n_\xi}\hat\varphi(\xi)\overline{\hat\psi(\xi)}\,\mathrm{d}\xi, \tag{2.3}$$

$$(\varphi\psi)\hat{\ }(\xi) = (2\pi)^{-n}(\hat\varphi * \hat\psi)(\xi) := (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n_\eta}\hat\varphi(\xi-\eta)\hat\psi(\eta)\,\mathrm{d}\eta,$$

$$(\varphi * \psi)\hat{\ }(\xi) = \hat\varphi(\xi)\hat\psi(\xi).$$

Die Identität (2.3) heißt auch PARSEVALsche Gleichung. Man beachte, daß die Gleichungen schöner werden, wenn man für die Differentiale der Kovariablen die Konvention $\,\mathrm{đ}\xi := \frac{1}{(2\pi)^n}\,\mathrm{d}\xi$ einführt. Schließlich wird der Ausdruck $(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n_y} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ als *Faltung* oder auch *Konvolution* bezeichnet (wenn man sich die Gestalt des Integranden anschaut, kann man vielleicht erahnen, was den Wortschöpfer womöglich zu dieser Bezeichnung veranlaßt hat).

Genauso, wie wir einen Dualraum zu $\mathcal{D}(\Omega)$ eingeführt haben, definieren wir nun einen Dualraum zu $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

Definition 2.24 (Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ der temperierten Distributionen). *Wir setzen*

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \{T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{C}\colon T \textit{ linear und stetig }\}.$$

Dieser Vektorraum heißt SCHWARTZ*–Raum der temperierten Distributionen.*

Die Stetigkeit bezieht sich natürlich auf die lokalkonvexe Topologie im $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, die von den Halbnormen erzeugt wird.

Beispiel 2.25. *Jede Funktion $f = f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, die für $|x|\to\infty$ höchstens polynomial wächst, erzeugt eine Distribution $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ gemäß der Formel $T_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$, wobei $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Für exponentiell wachsende Funktionen f gilt dies nicht unbedingt. Weil also in einem gewissen Sinne nur maßvolles Wachstum zulässig ist, nennt man diese Distributionen* temperiert. *Einzelheiten kommen weiter unten.*

Es kann sein, daß unsere Notation im Folgenden nicht immer präzise unterscheidet zwischen einer langsam wachsenden Funktion f und der von dieser erzeugten temperierten Distribution $T_f\in\mathcal{S}'$.

Lemma 2.26. *Der Testfunktionenraum $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist folgen-dicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ enthalten, und der Einbettungsoperator ist (folgen-)stetig.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Demnach ist jede lineare und stetige Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathbb{C}$ auch eine lineare und stetige Abbildung von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathbb{C}$. Das bedeutet $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ als Teilmengenbeziehung.

Es gilt sogar mehr: diejenige Abbildung, die ein $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ interpretiert als ein Element von $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, ist *injektiv.* Denn sei $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $T(\varphi) = 0$ für jedes $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist auch $T(\varphi) = 0$ für jedes $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, weil $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ folgen-dicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ liegt. Also haben wir $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ als stetige Einbettung.

Folgerung 2.27. *Aus Satz A.35 folgt: Man kann $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ multiplizieren und erhält $aT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, sogar $aT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ wenn $a \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Weiterhin gehören Ableitungen $\partial_x^\alpha T$ zu $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, wenn $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Aus der Formel (2.2) nehmen wir Inspiration zur Definition von $\hat{T}$:

Definition 2.28 (Fouriertransformation in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$). *Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann definieren wir $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ durch*

$$\hat{T}(\varphi) := T(\hat{\varphi}), \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Aus Satz A.35 bekommen wir dann, daß die Fouriertransformation ein topologischer Isomorphismus von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ auf sich ist.

Funktionen aus dem $L^2(\mathbb{R}^n)$ haben höchstens polynomiales Wachstum. Also erzeugen Funktionen aus dem $L^2(\mathbb{R}^n)$ reguläre Distributionen aus dem $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, was wir schreiben wollen als $L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Diese Schreibweise ist aus bereits erwähntem Grunde problematisch, eigentlich müßte man schreiben $I_{L^2\to\mathcal{S}'} L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, wobei $I_{L^2\to\mathcal{S}'}$ ein Operator sein soll, der eine L^2–Funktion abbildet auf die von ihr erzeugte Distribution. Eine solche Notation hat sich aber nicht eingebürgert. Auf jeden Fall können wir der Funktion $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ eine Fouriertransformation $\hat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ zuordnen. Das läßt sich verbessern: die Einbettung $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ ist folgen-dicht[2], und für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt die Plancherel-Identität: $\|\hat{\varphi}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^n \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Mit Dichtheitsargumenten bekommt man dann $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ für $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Das bedeutet, daß die Fouriertransformierte $\hat{u}$ nicht nur eine Distribution aus $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist, sondern sogar eine Funktion.

Es können auch glatte Funktionen Elemente von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ sein, die schneller als polynomial wachsen. Um dies zu sehen, müssen wir etwas ausholen. Zunächst gibt es auf dem $\mathbb{R}^n$ mindestens zwei relevante Integralbegriffe: zum ersten das herkömmliche Lebesgue–Integral für Funktionen aus dem $L^1(\mathbb{R}^n)$, zum zweiten das uneigentliche Lebesgue–Integral im Sinne von $\lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} \dots \, dx$. Diese sind unterschiedlich, wie die Funktion $x \mapsto (\sin x)/x$ zeigt, die nicht zum $L^1(\mathbb{R}^1)$ gehört. Wenn eine Funktion $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ eine Distribution aus dem $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ erzeugen soll, dann muß der uneigentliche Integralbegriff verwendet werden. Das folgt aus der in der Definition von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ geforderten Folgenstetigkeit und der folgendichten Einbettung $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S}$. Nun stellt man fest, daß die Funktion $f = f(x) = \exp(x) \cdot \cos(\exp(x)) = \partial_x(\sin(\exp(x)))$ tatsächlich eine Distribution aus dem $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ erzeugt, denn auf endlichen Intervallen $[-R, R] \subset \mathbb{R}^1$ ist die partielle Integration unproblematisch durchführbar. Aber f wächst schneller als polynomial.

2.5 Das Kern-Theorem von Schwartz

Seien A und B Funktionenräume über einem Gebiet Ω, zum Beispiel Sobolevräume. Wir stellen uns die Frage, wie lineare stetige Abbildungen zwischen A und B aussehen müssen. Diese Frage wird beantwortet werden vom Kern-Theorem von Schwartz, für das wir aber noch einige Vorbereitungen brauchen.

Definition 2.29 (Tensorprodukt von Funktionen). *Seien $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ und $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ Gebiete, also offen und zusammenhängend. Für Funktionen $u_j \in C(\Omega_j)$, $j = 1, 2$, definieren wir das Tensorprodukt $u_1 \otimes u_2 \in C(\Omega_1 \times \Omega_2)$ als*

$$(u_1 \otimes u_2)(x_1, x_2) := u_1(x_1) \cdot u_2(x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2.$$

In der Anwendung wird oft $\Omega_1 = \Omega_2$ sein, das ist aber nicht zwingend.

Wir halten fest, daß für $u_j \in C(\Omega_j)$ und $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega_j)$ gilt:

$$\iint_{\Omega_1\times\Omega_2} (u_1 \otimes u_2) \cdot (\varphi_1 \otimes \varphi_2) \, dx_1 \, dx_2 = \left(\int_{\Omega_1} u_1 \varphi_1 \, dx_1 \right) \left(\int_{\Omega_2} u_2 \varphi_2 \, dx_2 \right).$$

Das läßt sich auf Distributionen u_j übertragen:

Satz 2.30 (Tensorprodukt von Distributionen). *Seien $u_j \in \mathcal{D}'(\Omega_j)$ für $j = 1, 2$. Dann existiert genau eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ sodaß*

$$u(\varphi_1 \otimes \varphi_2) = u_1(\varphi_1) \cdot u_2(\varphi_2)$$

[2] Übungsaufgabe !

für alle $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ *und* $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ *gilt. Weiterhin ist, für alle* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$,

$$u(\varphi) = u_1\left[u_2(\varphi(x_1, x_2))\right] = u_2\left[u_1(\varphi(x_1, x_2))\right], \tag{2.4}$$

wobei u_j *nur bzgl. der Variablen* x_j *operiert und die andere Variable als Parameter unberührt läßt.*
Wenn $u_j \in \mathcal{E}'(\Omega_j)$, *dann gilt die obige Darstellung auch für* $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.
Wir schreiben $u = u_1 \otimes u_2$ *und nennen dies* Tensorprodukt.

Beweis. Siehe [8], Band 1, Theorem 5.1.1. □

Bevor wir uns nun dem Kern–Theorem nähern, führen wir noch eine Schreibweise ein.

Definition 2.31. *Für eine Distribution* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *und eine Testfunktion* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *bezeichnet*

$$\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} \in \mathbb{C}$$

das Ergebnis der Anwendung von u *auf* φ, *also* $u(\varphi)$. *Entsprechende Schreibweisen vereinbaren wir für die Paarungen* $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}$ *und* $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}$. *Wir haben bzw. vereinbaren folgende Relationen zwischen den verschiedenen Paarungen:*

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{E}' \times \mathcal{E}} &= \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}, \qquad T \in \mathcal{E}', \quad \varphi \in \mathcal{D}, \\ \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} &= \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}, \qquad T \in \mathcal{S}', \quad \varphi \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Als Motivation betrachten wir eine Funktion $K = K(x_1, x_2) \in C(\Omega_1 \times \Omega_2)$ und definieren

$$(\mathcal{K}\varphi)(x_1) := \int_{\Omega_2} K(x_1, x_2)\varphi(x_2)\,\mathrm{d}x_2$$

für eine Funktion $\varphi \in C_0(\Omega_2)$, dem Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger innerhalb von Ω_2. Dann ist $\mathcal{K}\varphi \in C(\Omega_1)$. Beachte, daß K beliebige Polstellen haben kann, falls $x_1 \to \partial\Omega_1$ oder $x_2 \to \partial\Omega_2$.
Wenn wir obige Gleichung mit $\psi \in C_0(\Omega_1)$ paaren, bekommen wir

$$\int_{\Omega_1} (\mathcal{K}\varphi)(x_1) \cdot \psi(x_1)\,\mathrm{d}x_1 = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} K(x_1, x_2) \cdot (\psi \otimes \varphi)(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2.$$

Wenn wir den linken Faktor im Integranden als Distribution interpretieren, erkennen wir die Idee des Kern–Theorems von Schwartz.

Theorem 2.32 (Kern–Theorem von Schwartz).

1. *Sei* $K \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$, *und für* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ *sei* $\mathcal{K}\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ *definiert durch*

   $$\langle \mathcal{K}\varphi, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_1) \times \mathcal{D}(\Omega_1)} := \langle K, \psi \otimes \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2) \times \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)}, \qquad \psi \in \mathcal{D}(\Omega_1).$$

   Diese Abbildung $\varphi \mapsto \mathcal{K}\varphi$ *ist linear und stetig von* $\mathcal{D}(\Omega_2)$ *nach* $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ *in folgendem Sinne:*

   Wenn $\varphi_j \overset{\mathcal{D}(\Omega_2)}{\longrightarrow} 0$ *konvergiert, dann konvergiert auch* $\mathcal{K}\varphi_j \overset{\mathcal{D}'(\Omega_1)}{\longrightarrow} 0$ *(jeweils für* $j \to \infty$*).*

2. *Sei* $\mathcal{K}$ *eine Abbildung von* $\mathcal{D}(\Omega_2)$ *nach* $\mathcal{D}'(\Omega_1)$, *die linear und stetig ist in obigem Sinne. Dann existiert genau eine Distribution* $K \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ *mit*

   $$\langle \mathcal{K}\varphi, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_1) \times \mathcal{D}(\Omega_1)} = \langle K, \psi \otimes \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2) \times \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)},$$

   für alle $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ *und alle* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$.

Die Distribution K *heißt* Kern *zum Operator* $\mathcal{K}$.

Beweis. Siehe [8], Band 1, Theorem 5.2.1. □

Die Abbildung $\mathcal{K}$ darf die Glattheit der Funktion φ praktisch beliebig verschlechtern. Das bedeutet insbesondere, daß jede für uns relevante Abbildung von diesem Theorem erfaßt wird.

Beispiel 2.33. *Sei $\Omega_1 = \Omega_2$ und $\mathcal{K}\varphi = \varphi$, also $\mathcal{K}$ gleich der identischen Abbildung. Dann ist $\langle \mathcal{K}\varphi, \psi\rangle = \int_{\Omega_1} \varphi(x_1)\psi(x_1)\,\mathrm{d}x_1$, und es stellt sich heraus, daß die Distribution K gegeben ist durch*

$$\langle K, \Phi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_1\times\Omega_1)\times\mathcal{D}(\Omega_1\times\Omega_1)} = \int_{\Omega_1} \Phi(x_1, x_1)\,\mathrm{d}x_1,$$

für alle $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_1)$. Der Träger der Distribution K ist auf der Diagonalen,

$$\operatorname{supp} K = \operatorname{diag}(\Omega_1 \times \Omega_1) := \{(x_1, x_1) \in \Omega_1 \times \Omega_1 \colon\ x_1 \in \Omega_1\}\,.$$

Man beachte, daß K keine Funktion bzw. reguläre Distribution ist. Im Physiker–Jargon haben wir $K(x_1, x_2) = \delta_{x_1=x_2}$, wobei δ die Delta–Distribution bezeichnet.

Satz 2.34 (Glättende Operatoren).

1. *Sei $K \in C^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ und $\mathcal{K} \colon \mathcal{D}(\Omega_2) \to \mathcal{D}'(\Omega_1)$ definiert durch*

   $$\langle \mathcal{K}\varphi, \psi\rangle := \langle K, \psi \otimes \varphi\rangle\,, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_2), \quad \psi \in \mathcal{D}(\Omega_1).$$

   Dann kann $\mathcal{K}$ stetig fortgesetzt werden zu einer Abbildung

   $$\mathcal{K} \colon \mathcal{E}'(\Omega_2) \to \mathcal{E}(\Omega_1)$$

   gemäß

   $$(\mathcal{K}\varphi)(x_1) := \varphi(K(x_1, \cdot)), \qquad \varphi \in \mathcal{E}'(\Omega_2), \quad x_1 \in \Omega_1. \tag{2.5}$$

2. *Sei $\mathcal{K} \colon \mathcal{E}'(\Omega_2) \to \mathcal{E}(\Omega_1)$ linear und stetig, dann existiert genau ein $K \in C^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ mit (2.5).*

Man sagt auch: „glatte Kerne erzeugen glättende Operatoren“.

Beweisskizze.

1. Sei $K \in C^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ und $\varphi \in \mathcal{E}'(\Omega_2)$. Die Paarung

   $$\varphi(K(x_1, \cdot)) := \langle \varphi, K(x_1, \cdot)\rangle_{\mathcal{E}'(\Omega_2)\times\mathcal{E}(\Omega_2)}$$

   hängt glatt vom Parameter x_1 ab, ergibt also eine Funktion aus dem $C^\infty(\Omega_1)$. Für Einzelheiten verweisen wir auf [8] und auch Lemma 2.41.

2. Sei $\mathcal{K} \colon \mathcal{E}'(\Omega_2) \to \mathcal{E}(\Omega_1)$. Für ein $x_2 \in \Omega_2$ setzen wir

   $$K(\cdot, x_2) = \mathcal{K}\delta_{x_2},$$

   wobei δ_{x_2} die Delta-Distribution am Punkt x_2 bezeichnet. Das ergibt eine Funktion aus dem $C^\infty(\Omega_1)$, die in noch unbekannter Weise von einem Parameter x_2 abhängt. Um die Regularität bzgl. x_2 zu untersuchen, betrachten wir Differenzenquotienten: sei dazu $v \in \mathbb{R}^n$, mit $v \neq \vec{0}$. Dann ist

   $$\frac{K(\cdot, x_2 + tv) - K(\cdot, x_2)}{t} = \mathcal{K}\left(\frac{1}{t}(\delta_{x_2+tv} - \delta_{x_2})\right).$$

   Für $t \to +0$ strebt die linke Seite zur Richtungsableitung $\partial_v K(\cdot, x_2)$, und die rechte Seite nach $\mathcal{K}(\partial_v \delta_{x_2})$. Nun ist aber auch $\partial_v \delta_{x_2}$ eine Distribution aus $\mathcal{E}'(\Omega_2)$, also existiert der Grenzwert, und K ist einmal stetig nach x_2 differenzierbar. Wenn man diese Argumentation wiederholt, findet man $K \in C^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

   Damit haben wir dann (2.5) gezeigt, für alle Distributionen $\varphi \in \mathcal{E}'(\Omega_2)$, die als endliche Linearkombinationen von Delta-Distributionen geschrieben werden können. Und solche Distributionen sind folgen-dicht[3] in $\mathcal{E}'(\Omega_2)$. Also gilt (2.5) für alle $\varphi \in \mathcal{E}'(\Omega_2)$.

□

Beispiel 2.35. *Wir wählen $\Omega = \mathbb{R}^n$. Sei $(\mathcal{K}\varphi)(x) = (\varphi * f_\varepsilon)(x)$, für $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, und $f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} f(x/\varepsilon)$, wobei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, und $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Ausgeschrieben lautet das*

$$(\mathcal{K}\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_y} f_\varepsilon(x - y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y,$$

und wir haben die Kernfunktion $K(x, y) = f_\varepsilon(x - y)$, die offensichtlich glatt ist und einen Träger hat in einem Schlauch der Breite $\mathcal{O}(\varepsilon)$ um die Diagonale von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

[3] Übungsaufgabe

2.6 Distributionen auf Mannigfaltigkeiten

Für eine etwas ausführlichere Darstellung des hier behandelten Zugangs verweisen wir auf [7] und auch [8, Kapitel 6.3]. Wir werden später ein weiteres Mal Distributionen auf Mannigfaltigkeiten definieren (und dabei einem etwas komplizierteren Weg folgen).

Sei $\mathcal{M}$ eine reelle C^∞–Mannigfaltigkeit der Dimension n; über den Rand von $\mathcal{M}$ wird im Moment nichts vorausgesetzt. Die Karten von $\mathcal{M}$ schreiben wir als (Ω_j, κ_j), wobei κ_j ein Homeomorphismus von einer offenen Menge $\Omega_j \subset \mathcal{M}$ auf eine offene Menge $\tilde{\Omega}_j \subset \mathbb{R}^n$ ist. Sei nun $j = 1, 2$. Wenn nun $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ ist, dann ist bekanntlich $\kappa_1\kappa_2^{-1}$ ein Diffeomorphismus von $\kappa_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ auf $\kappa_1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$.

Definition 2.36 (Funktionenräume auf Mannigfaltigkeiten). *Wir sagen, daß $u \in C^k(\mathcal{M})$ oder $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$ ist, wenn die Funktion*

$$u \circ \kappa_j^{-1} = (u \circ \kappa_j^{-1})(x) = u(\kappa_j^{-1}(x)), \quad x \in \tilde{\Omega}_j$$

ein Element von $C^k(\tilde{\Omega}_j)$ bzw. von $L^p_{\mathrm{loc}}(\tilde{\Omega}_j)$ ist, für jede Karte (Ω_j, κ_j).

Das sind keine normierten Räume.

Für spätere Zwecke ist es ratsam, eine andere Beschreibung zur Verfügung zu haben, die wir uns jetzt erarbeiten.

Sei $u \in C^k(\mathcal{M})$, und sei $u_{\kappa_1} := u \circ \kappa_1^{-1}$ das in die Karte heruntergezogene u. Dann ist $u_{\kappa_1} \in C^k(\tilde{\Omega}_1)$. Analoges gilt für eine andere Kartenabbildung κ_2. Es ist unmittelbar einsichtig, daß

$$u_{\kappa_2}(x) = u_{\kappa_1} \circ (\kappa_1\kappa_2^{-1})(x), \qquad \forall x \in \kappa_2(\Omega_1 \cap \Omega_2).$$

Umgekehrt: angenommen, zu jedem κ_j existiere ein u_{κ_j} als Funktion in $\tilde{\Omega}_j$, und es gelte die Identität $u_{\kappa_2} = u_{\kappa_1} \circ (\kappa_1\kappa_2^{-1})$ für alle $x \in \kappa_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$, dann existiert genau eine Funktion u auf $\mathcal{M}$ mit $u_{\kappa_j} = u \circ \kappa_j^{-1}$ für alle κ_j, und es ist $u \in C^k(\mathcal{M})$ genau dann wenn $u_{\kappa_j} \in C^k(\tilde{\Omega}_j)$ für alle j.

Während wir zuerst von u auf u_{κ_j} geschlossen haben, sind wir anschließend umgekehrt vorgegangen.

Nun wollen wir $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$ definieren. Wenn u eine Distribution auf $\mathcal{M}$ sein soll, dann wird ein (noch passend zu definierendes) u_{κ_j} vermutlich eine Distribution auf $\tilde{\Omega}_j \subset \mathbb{R}^n$ sein, und es sollte wünschenswerterweise die Übergangsbedingung $u_{\kappa_2} = u_{\kappa_1} \circ (\kappa_1\kappa_2^{-1})$ gelten.

Also brauchen wir zunächst die Definition der Komposition von Distributionen mit Diffeomorphismen.

Seien $\tilde{\Omega}_1$, $\tilde{\Omega}_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei

$$\psi\colon \tilde{\Omega}_1 \to \tilde{\Omega}_2,$$
$$\psi\colon x_1 \mapsto x_2 = \psi(x_1)$$

ein Diffeomorphismus von $\tilde{\Omega}_1$ auf $\tilde{\Omega}_2$. Wenn $u \in C^0(\tilde{\Omega}_2)$, dann ist $u \circ \psi \in C^0(\tilde{\Omega}_1)$. Sei nun $\varphi \in C_0^\infty(\tilde{\Omega}_1)$, dann ist

$$\int_{\tilde{\Omega}_1} (u \circ \psi)(x_1) \cdot \varphi(x_1)\,\mathrm{d}x_1 = \int_{\tilde{\Omega}_2} u(x_2) \cdot \varphi(\psi^{-1}(x_2)) \cdot \left|\det(\psi^{-1})'(x_2)\right|\,\mathrm{d}x_2.$$

Diese Identität motiviert uns nun zu folgender Definition: wenn $u \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega}_2)$, dann setzen wir $u \circ \psi \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega}_1)$ fest als

$$\langle u \circ \psi, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\tilde{\Omega}_1)\times\mathcal{D}(\tilde{\Omega}_1)} := \left\langle u, (\varphi \circ \psi^{-1})|\det(\psi^{-1})'|\right\rangle_{\mathcal{D}'(\tilde{\Omega}_2)\times\mathcal{D}(\tilde{\Omega}_2)}, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega}_1). \tag{2.6}$$

Die Abbildung

$$u \mapsto u \circ \psi,$$
$$\mathcal{D}'(\tilde{\Omega}_2) \to \mathcal{D}'(\tilde{\Omega}_1)$$

ist stetig bzgl. der kanonischen schwach-$*$-Topologien. Wir schreiben statt $u \circ \psi$ gelegentlich auch $\psi^* u$ und nennen dies den Pullback von Distributionen (keinesfalls zu verwechseln mit dem Pullback ψ^* von

Funktionen, auch wenn die Notation dieselbe ist). Die Konsequenz daraus ist: laut Satz 2.7 ist die Einbettung $\mathcal{D}(\tilde{\Omega}) \subset \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$ folgen-dicht. Wir können uns also $u \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega}_2)$ angenähert denken durch eine Folge in $\mathcal{D}(\tilde{\Omega}_2)$, und es ergibt sich die Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial x_{1,k}}(u \circ \psi) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x_{1,k}} \right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_{2,j}} \circ \psi \right), \qquad u \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega}_2).$$

Die Kettenregel gilt also auch für die Komposition von Distributionen und Diffeomorphismen.

Analoges gilt für die Multiplikation mit $a \in C^\infty(\tilde{\Omega}_2)$:

$$(a \cdot u) \circ \psi = (a \circ \psi) \cdot (u \circ \psi), \qquad u \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega}_2).$$

Nun haben wir alle Zutaten beisammen:

Definition 2.37 (Distributionen auf Mannigfaltigkeiten). *Sei $\mathcal{M}$ eine C^∞–Mannigfaltigkeit. Wenn es zu jeder Karte (Ω_j, κ_j) eine Distribution $u_{\kappa_j} \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega}_j)$ gibt mit*

$$u_{\kappa_2} = u_{\kappa_1} \circ (\kappa_1 \kappa_2^{-1}) \quad \text{in } \kappa_2(\Omega_1 \cap \Omega_2),$$

dann heißt dieses System der u_{κ_j} Distribution auf $\mathcal{M}$. *Die Menge aller solchen Distributionen schreiben wir als $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$.*

Hierbei ist der Term $u_{\kappa_1} \circ (\kappa_1 \kappa_2^{-1})$ im Sinne der obigen Komposition von Distributionen und Diffeomorphismen zu verstehen.

Jede stetige Funktion $u \in C^0(\mathcal{M})$ kann als Distribution aufgefaßt werden, wenn wir $u \in C^0(\mathcal{M})$ mit dem System der $u_{\kappa_j} := u \circ \kappa_j^{-1}$ identifizieren.

Ohne Beweis geben wir an:

Satz 2.38. *Falls $\mathcal{M}$ ein Gebiet des $\mathbb{R}^n$ ist, dann stimmt die obige Definition mit Definition 2.3 und Definition 2.4 überein.*

Bemerkung 2.39. *Ein anderer Zugang (siehe auch [7]) ist wie folgt:*

Der Raum $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$ wird definiert als Raum aller stetigen Linearformen auf dem Raum der glatten Dichten *mit kompakten Träger.*

Dabei heißt L eine Dichte, wenn L ein lineares Funktional auf $C_0^\infty(\mathcal{M})$ ist, sodaß für jede Karte (Ω_j, κ_j) eine Funktion $L^{\kappa_j} \in C^\infty(\tilde{\Omega}_j)$ existiert mit

$$L(\varphi) = \int_{\tilde{\Omega}_j} L^{\kappa_j} \cdot (\varphi \circ \kappa_j^{-1})\, d\tilde{x}, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_j).$$

Man kann auch Dichten an die Distributionen anmultiplizieren und dann diese Distributionendichten *invariant als Dual zum $C_0^\infty(\mathcal{M})$ definieren. Wir werden darauf später noch mal eingehen.*

Schließlich betrachten wir Differentialoperatoren: Wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dann haben wir

$$P = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$$

mit Koeffizienten $a_\alpha \in C^k(\Omega)$. Offensichtlich ist P linear und stetig als Abbildung von $C^\infty(\Omega)$ nach $C^k(\Omega)$.

Sei nun $\mathcal{M}$ eine C^∞–Mannigfaltigkeit. Wir sagen, daß $P\colon C^\infty(\mathcal{M}) \to C^k(\mathcal{M})$ (linear und stetig) ein PDO ist, wenn es zu jeder Karte (Ω_j, κ_j) einen PDO P^{κ_j} mit C^k–Koeffizienten gibt, sodaß

$$(Pu) \circ \kappa_j^{-1} = P^{\kappa_j}(u \circ \kappa_j^{-1}) \quad \text{in } \tilde{\Omega}_j \tag{2.7}$$

gilt, für alle $u \in C^\infty(\mathcal{M})$.

Was soll nun Pu sein, wenn $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$?

Wir schauen uns (2.7) an noch mit einer anderen Karte, wobei $x_I = (\kappa_1\kappa_2^{-1})(x_{II})$ mit $x_{II} \in \kappa_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ und $x_I \in \kappa_1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$:

$$(Pu)(\kappa_1^{-1}(x_I)) = ((Pu) \circ \kappa_1^{-1})(x_I) = (P^{\kappa_1}(u \circ \kappa_1^{-1}))(x_I),$$
$$(Pu)(\kappa_2^{-1}(x_{II})) = ((Pu) \circ \kappa_2^{-1})(x_{II}) = (P^{\kappa_2}(u \circ \kappa_2^{-1}))(x_{II}).$$

Die linken Seiten sind gleich, also müssen auch die rechten Seiten gleich sein. Wir setzen $v = u \circ \kappa_1^{-1}$, und wir können $v \in C_0^\infty(\kappa_1(\Omega_1 \cap \Omega_2))$ annehmen. Wenn wir dann $x_I = (\kappa_1\kappa_2^{-1})(x_{II})$ einsetzen, haben wir

$$(P^{\kappa_1}v)\left(\left(\kappa_1\kappa_2^{-1}\right)(x_{II})\right) = \left(P^{\kappa_2}\left(v \circ \kappa_1\kappa_2^{-1}\right)\right)(x_{II}).$$

Insgesamt bekommen wir die Verträglichkeitsbedingung

$$(P^{\kappa_1}v) \circ \left(\kappa_1\kappa_2^{-1}\right) = P^{\kappa_2}\left(v \circ (\kappa_1\kappa_2^{-1})\right), \qquad \forall v \in C_0^\infty(\kappa_1(\Omega_1 \cap \Omega_2)). \tag{2.8}$$

Auf der rechten Seite können wir die Kettenregel anwenden, die aber auch für Distributionen zur Verfügung steht. Also muß (2.8) auch für alle $v \in \mathcal{D}'(\kappa_1(\Omega_1 \cap \Omega_2))$ gelten.

Sei nun $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$, also ist (gemäß unserer Definition) u ein System von Distributionen $u_{\kappa_j} \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega}_j)$ mit $u_{\kappa_2} = u_{\kappa_1} \circ (\kappa_1\kappa_2^{-1})$ in $\kappa_2(\Omega_1 \circ \Omega_2)$. Die Einschränkung von u_{κ_1} auf $\kappa_1(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ ist auch ein Element von $\mathcal{D}'(\kappa_1(\Omega_1 \cap \Omega_2))$. Also gilt, gemäß (2.8),

$$(P^{\kappa_1}u_{\kappa_1}) \circ (\kappa_1\kappa_2^{-1}) = P^{\kappa_2}\left(u_{\kappa_1} \circ \kappa_1\kappa_2^{-1}\right) = P^{\kappa_2}u_{\kappa_2}.$$

Das bedeutet, daß auch die Familie $(P^{\kappa_j}u_{\kappa_j})_j$ die Übergangsbedingung aus Definition 2.37 erfüllt. Damit ist dies auch eine Distribution; diese nennen wir Pu.

Schließlich widmen wir uns der Frage, wie man den Hauptteil eines PDO auf einer Mannigfaltigkeit definieren kann. Im Falle von $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist dies einfach: zu

$$P(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$$

ist der Hauptteil gleich

$$P_m(x, D_x) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) D_x^\alpha.$$

Sei nun $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ und $\tau \in \mathbb{R}$. Dann haben wir, immer noch für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

$$e^{-\mathrm{i}\tau\varphi(x)} P e^{\mathrm{i}\tau\varphi(x)} = \tau^m P_m(x, \operatorname{grad}\varphi(x)) + \mathcal{O}(\tau^{m-1}), \qquad \tau \to \infty.$$

Das läßt sich auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinern:

Definition 2.40 (Hauptteil eines Operators). *Sei P ein PDO auf einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$. Wir definieren*

$$\operatorname{ord}(P) = \sup\left\{ \textit{Ordnung der } \tau\textit{–Polynome } e^{-\mathrm{i}\tau\varphi} P e^{\mathrm{i}\tau\varphi} \colon \varphi \in C^\infty(\mathcal{M}) \right\}.$$

Im Falle von $m := \operatorname{ord}(P) < \infty$ definieren wir den Hauptteil P_m von P durch die Beziehung, daß $P_m(x, \mathrm{d}\varphi(x))$ der Koeffizient von τ^m sein soll im Polynom $e^{-\mathrm{i}\tau\varphi(x)} P e^{\mathrm{i}\tau\varphi(x)}$.

Der Vorteil dieser Definition besteht darin, daß sie invariant ist: das heißt, daß sie bzgl. sämtlicher Karten gleich aussieht.

2.7 Sonstiges und Technikalitäten

In diesem Abschnitt tragen wir einige Dinge zusammen, die eine gewisse Bedeutung haben, aber nicht im Zentrum unserer Aufmerksamkeit stehen sollen (die Distributionentheorie ist sehr umfangreich).

Lemma 2.41 (Ableiten nach Parametern). *Sei $g \in \mathcal{D}'(\Omega_y)$, und für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_x \times \Omega_y)$ setzen wir*

$$\psi(x) := \langle g(y), \varphi(x,y) \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_y)\times\mathcal{D}(\Omega_y)}, \qquad x \in \Omega_x.$$

Dann ist $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_x)$ und

$$\partial_x^\alpha \psi(x) = \langle g(y), \partial_x^\alpha \varphi(x,y) \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_y)\times\mathcal{D}(\Omega_y)}, \qquad x \in \Omega_x.$$

Wenn $(\varphi_1, \varphi_2, \dots) \subset \mathcal{D}(\Omega_x \times \Omega_y)$ eine Folge ist mit $\varphi \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ für $j \to \infty$, und

$$\psi_j(x) := \langle g(y), \varphi_j(x,y) \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_y)\times\mathcal{D}(\Omega_y)}, \qquad x \in \Omega_x,$$

dann ist auch $\psi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi$ für $j \to \infty$.

Beweis. Offensichtlich ist $\psi(x)$ definiert für jedes $x \in \Omega_x$, und es gibt[4] Kompakta $K_x \Subset \Omega_x$, $K_y \Subset \Omega_y$ (abhängig von φ) mit $\operatorname{supp} \varphi \Subset K_x \times K_y$, also auch $\operatorname{supp} \psi \Subset K_x$.

Die Funktion ψ ist stetig, denn wenn $\lim_{j\to\infty} x_j = x$, dann ist $\varphi(x_j, \cdot) \overset{\mathcal{D}(\Omega_y)}{\longrightarrow} \varphi(x, \cdot)$, also auch $\lim_{j\to\infty} \psi(x_j) = \psi(x)$, denn Distributionen sind definiert als folgenstetige Abbildungen vom Testfunktionenraum nach $\mathbb{C}$.

Die Funktion ψ ist differenzierbar, denn für $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\frac{1}{t}\left(\psi(x+te_k) - \psi(x)\right) = \left\langle g(y), \frac{1}{t}\left(\varphi(x+te_k, y) - \varphi(x,y)\right) \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_y)\times\mathcal{D}(\Omega_y)},$$

und die rechte Seite strebt für $t \to 0$ nach $\langle g(y), \partial_{x_k} \varphi(x,y) \rangle$.

Analog zeigt man die Existenz höherer Ableitungen, also ist $\psi \in C^\infty(\Omega_x)$, und wegen $\operatorname{supp} \psi \Subset K_x$ ist dann auch $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_x)$.

Sei nun $\varphi_j \to \varphi$ in der Topologie von $\mathcal{D}(\Omega_x \times \Omega_y)$. Aus Definition 2.4 haben wir

$$|\psi(x)| \le C_g \left\| \varphi(x, \cdot) \right\|_{C_b^m(K_y)},$$

mit Konstanten C_g und m, die nur von g und K_y abhängen. Also ist

$$|\psi(x) - \psi_j(x)| \le C_g \left\| \varphi(x, \cdot) - \varphi_j(x, \cdot) \right\|_{C_b^m(K_y)},$$

und somit $\lim_{j\to\infty} \|\psi - \psi_j\|_{L^\infty(K_x)} = 0$. Analog zeigt man $\lim_{j\to\infty} \|\partial_x^\alpha(\psi - \psi_j)\|_{L^\infty(K_x)} = 0$. Man beachte, daß die Träger der ψ_j in einem einheitlichen Kompaktum echt innerhalb Ω_x enthalten sind. Damit ist die Konvergenz der Folge der ψ_j gegen ψ in der Topologie von $\mathcal{D}(\Omega_x)$ gezeigt. $\square$

Eine Variation davon beweist sich fast genauso:

Lemma 2.42 (Ableiten nach Parametern). *Sei $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_y})$, und für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y})$ setzen wir*

$$\psi(x) := \langle g(y), \varphi(x,y) \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n_y})\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_y})}, \qquad x \in \mathbb{R}^{n_x}.$$

Dann ist $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_x})$ und

$$\partial_x^\alpha \psi(x) = \langle g(y), \partial_x^\alpha \varphi(x,y) \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n_y})\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_y})}, \qquad x \in \mathbb{R}^{n_x}.$$

Wenn $(\varphi_1, \varphi_2, \dots) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y})$ eine Folge ist mit $\varphi \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ für $j \to \infty$, und

$$\psi_j(x) := \langle g(y), \varphi_j(x,y) \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n_y})\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_y})}, \qquad x \in \mathbb{R}^{n_x}.$$

dann ist auch $\psi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$ für $j \to \infty$.

Gelegentlich nützlich ist noch folgender Satz:

[4] nichttriviale Übungsaufgabe

Satz 2.43. *Zu jedem $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_x \times \Omega_y)$ existiert eine Folge $(\varphi_1, \varphi_2, \dots) \subset \mathcal{D}(\Omega_x \times \Omega_y)$ mit Konvergenz $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ für $j \to \infty$, wobei jedes φ_j die Gestalt*

$$\varphi_j(x,y) = \sum_{k=1}^{N_j} u_k(x) v_k(y), \qquad u_k \in \mathcal{D}(\Omega_x), \quad v_k \in \mathcal{D}(\Omega_y)$$

hat.

Beweis. Seien $K_x \Subset \Omega_x$ und $K_y \Subset \Omega_y$ Kompakta mit $\operatorname{supp} \varphi \Subset K_x \times K_y$. Seien $\chi \in C_0^\infty(\Omega_x)$ und $\psi \in C_0^\infty(\Omega_y)$ mit $\chi \equiv 1$ auf K_x und $\psi \equiv 1$ auf K_y.

Der Approximationssatz von Stone–Weierstraß besagt, daß jede stetige Funktion auf einem Kompaktum in der L^∞–Norm angenähert werden kann durch eine Folge von Polynomen. Eine entsprechende Version gibt es auch für C^k-Normen. Sei also $P_k = P_k(x,y)$ ein Polynom mit

$$\left\| \partial_{x,y}^\alpha \varphi - \partial_{x,y}^\alpha P_k \right\|_{L^\infty(K_x \times K_y)} \leq \frac{1}{k}, \qquad \forall |\alpha| \leq k.$$

Dann definieren wir $\varphi_k(x,y) := \chi(x)\psi(y)P_x(x,y)$. □

Bemerkung 2.44. *Für $f \in \mathcal{D}'(\Omega_x)$ und $g \in \mathcal{D}'(\Omega_y)$ haben wir dann $f \otimes g = g \otimes f$, denn zu zeigen wäre $\langle f \otimes g, \varphi \rangle = \langle g \otimes f, \psi \rangle$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_x \times \Omega_y)$ und $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_y \times \Omega_x)$ mit $\psi(y,x) := \varphi(x,y)$. Das gilt aber unmittelbar für alle Testfunktionen φ mit der Gestalt $\varphi(x,y) = \sum_{k=1}^n u_k(x) v_k(y)$, siehe auch Satz 2.30. Insbesondere haben wir jetzt den rechten Teil von (2.4) gezeigt.*

Bemerkung 2.45. *Analog gilt $f \otimes g = g \otimes f$ für $f, g \in \mathcal{S}'$. Das folgt aus $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.*

Lemma 2.46 (Stetigkeit von Tensorprodukten). *Sei $(f_1, f_2, \dots) \subset \mathcal{D}'(\Omega_x)$ eine Folge von Distributionen mit $f_j \xrightarrow{\mathcal{D}'} f$ für $j \to \infty$, und sei $g \in \mathcal{D}'(\Omega_y)$. Dann ist*

$$f_j \otimes g \xrightarrow{\mathcal{D}'} f \otimes g, \qquad (j \to \infty),$$

das Tensorprodukt ist also (in jedem Faktor) folgenstetig als Abbildung von $\mathcal{D}'(\Omega_x) \times \mathcal{D}'(\Omega_y)$ nach $\mathcal{D}'(\Omega_x \times \Omega_y)$.

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_x \times \Omega_y)$. Dann ist mit ψ wie in Lemma 2.41, und mit der Definition des Tensorprodukts gemäß (2.4)

$$\begin{aligned} \langle f_j \otimes g, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_x \times \Omega_y) \times \mathcal{D}(\Omega_x \times \Omega_y)} &= \left\langle f_j, \langle g(y), \varphi(x,y) \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_y) \times \mathcal{D}(\Omega_y)} \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_x) \times \mathcal{D}(\Omega_x)} \\ &= \langle f_j, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_x) \times \mathcal{D}(\Omega_x)}, \end{aligned}$$

und für $j \to \infty$ strebt das nach

$$\langle f, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_x) \times \mathcal{D}(\Omega_x)} = \langle f \otimes g, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_x \times \Omega_y) \times \mathcal{D}(\Omega_x \times \Omega_y)}.$$

□

Bemerkenswert ist, daß man unter bestimmten Voraussetzungen ein Integral aus einem Dualitätsprodukt herausziehen darf:

Lemma 2.47 („Fubini"). *Seien $f \in \mathcal{D}'(\Omega_x)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_x \times \Omega_y)$. Dann ist*

$$\left\langle f, \int_{\Omega_y} \varphi(x,y)\, \mathrm{d}y \right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_x) \times \mathcal{D}(\Omega_x)} = \int_{\Omega_y} \langle f(x), \varphi(x,y) \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_x) \times \mathcal{D}(\Omega_x)} \,\mathrm{d}y.$$

Beweis. Sei $1(y)$ die Funktion, die jedes $y \in \Omega_y$ auf 1 abbildet. Diese Funktion identifizieren wir mit der durch ihr erzeugten regulären Distribution. Dann ist (vgl. (2.4))

$$\langle f \otimes 1, \varphi \rangle = \langle f, \langle 1, \varphi, \rangle \rangle$$

gleich der linken Seite, und mit $\psi(y,x) := \varphi(x,y)$ ist

$$\langle 1 \otimes f, \psi \rangle = \langle 1, \langle f, \psi \rangle \rangle$$

gleich der rechten Seite. Nun ist aber $1 \otimes f = f \otimes 1$. □

Bemerkung 2.48. *Analoges gilt mit $\mathcal{S}$ statt $\mathcal{D}$ und $\mathbb{R}^{n_x}$ statt Ω_x, $\mathbb{R}^{n_y}$ statt Ω_y.*

Kapitel 3

Elemente einer Theorie partieller Differentialgleichungen

In diesem Kapitel wollen wir in kompakter Form einige zentrale Aspekte zu partiellen Differentialgleichungen zusammentragen. Eine gut lesbare Einführung findet sich in [19].

3.1 Historische Einteilung

Wir betrachten auf dem $\mathbb{R}^n$ PDO zweiter Ordnung: $P(x, \partial_x) = \sum_{|\alpha| \le 2} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$. Es hat sich herausgestellt, daß diese Operatoren nicht alle gleichartig sind: die Lösungen $u = u(x)$ zu Differentialgleichungen $Pu = f$ können sehr unterschiedliches Verhalten zeigen, je nach der Art des Operators P.

Es scheint also ratsam, die allgemeinen PDO zweiter Ordnung in verschiedene Typen zu sortieren, und diese jeweils für sich zu untersuchen. Wir beobachten dazu, daß ein PDO zweiter Ordnung immer geschrieben werden kann als

$$P = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \partial_j \partial_k + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \partial_j + c(x),$$

wobei $a_{jk} = a_{kj}$. Im Falle konstanter Koeffizienten können wir dies auch schreiben als

$$P(\partial_x) = \begin{pmatrix} \partial_1 & \dots & \partial_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix} + c,$$

was uns an quadratische Formen $L(x) = x^\top A x + b^\top x + c$ erinnert. Bekanntlich kann man Quadriken $\{x \in \mathbb{R}^n : L(x) = 0\}$ für $n = 3$ in verschiedene Klassen einteilen, zum Beispiel Ellipsoide, Hyperboloide und Paraboloide (sowie viele Sonderfälle), was die Wortwahl der folgenden Definition erklärt.

Definition 3.1 (Typeinteilung). *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit, und sei $b = (b_0, b_1, \dots, b_n)^\top \in \mathbb{R}^{1+n}$ sowie $c \in \mathbb{R}$.*

Dann heißt der Operator in $\mathbb{R}^n$

$$P(\partial_x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_i \partial_j + \sum_{j=1}^{n} b_j \partial_j + c$$

elliptisch*; der Operator im $\mathbb{R}^{1+n}$*

$$P(\partial_x) = \partial_{x_0}^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_i \partial_j - \sum_{j=0}^{n} b_j \partial_j - c$$

heißt hyperbolisch*; und der Operator im $\mathbb{R}^{1+n}$*

$$P(\partial_x) = \partial_{x_0} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_i \partial_j - \sum_{j=1}^{n} b_j \partial_j - c$$

heißt parabolisch.

Diese Definition hat sich historisch ergeben, und es hat sich herausgestellt, daß einige Operatoren von großer Bedeutung nicht von dieser Definition erfaßt werden, wir erwähnen nur:

- den Cauchy–Riemann-Operator $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y})$,
- den zeitabhängigen Schrödingeroperator $\frac{1}{\mathrm{i}}\partial_t - \triangle$, wobei $\triangle = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$.

3.2 Charakteristiken und heutige Definitionen

Definition 3.2 (Charakteristiken). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, und in Ω sei eine Hyperfläche S gegeben als $S = \{x \in \Omega \colon \varphi(x) = 0\}$, wobei φ eine reell–wertige Funktion der Glattheit C^∞ sei, mit* $\operatorname{grad}\varphi(x) \neq 0$ *auf ganz S.*

Wir sagen, daß S im Punkt $x_* \in S$ charakteristisch für den Operator $P(x, D_x) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ *(mit glatten $\mathbb{C}$–wertigen Koeffizienten a_α) ist, wenn*

$$P_m(x_*, \operatorname{grad}\varphi(x_*)) = 0.$$

Hierbei ist P_m der Hauptteil von P.

Wir sagen, daß S eine Charakteristik zu *P ist, wenn S an jedem Punkt von S charakteristisch für P ist.*

Beispiel 3.3. *Der Laplace–Operator $P = \triangle$ mit $P(x, \xi) = -|\xi|^2$ hat keine Charakteristiken.*

Beispiel 3.4. *Der Cauchy–Riemann–Operator $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ hat keine Charakteristiken.*

Beispiel 3.5. *Sei $P = \partial_t^2 - \triangle$ mit $\triangle = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$. Dann führt $P_m((t_*, x_*), (\nabla_{t,x}\varphi)(t_*, x_*)) = 0$ auf*

$$-\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 - \cdots - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)^2\right) = 0,$$

also z.B. $\varphi(t, x) = t^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2 = t^2 - |x|^2$. Die Gleichung $\varphi = 0$ beschreibt dann den sogenannten Lichtkegel (genauer: den Dualkegel zum Lichtkegel, siehe [19]).

Beispiel 3.6. *Sei $P = \partial_t - \triangle$. Die Gleichung $P_2((t_*, x_*), (\nabla_{t,x}\varphi)(t_*, x_*)) = 0$ ist dann*

$$0 \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)^2 = 0,$$

mit einer (von unendlich vielen) Lösung $\varphi(t, x) = t$. Die Fläche $S = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n} \colon t = 0\}$ ist dann eine Charakteristik für den parabolischen Operator $P = \partial_t - \triangle$.

Bemerkung 3.7. *Im allgemeinen kann man sagen: wenn man ein Problem $Pu = f$ betrachtet mit Anfangsdaten auf einer charakteristischen Hyperfläche, dann ist das Problem nicht wohl–gestellt (z.B. kann es Probleme mit der Eindeutigkeit oder mit der Lösbarkeit geben). Das berühmteste Beispiel ist das folgende: Die Funktion*

$$u = u(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) & : t > 0, \\ 0 & : \big((t, x) \in (-\infty, 0] \times \mathbb{R}\big) \setminus \{(0, 0)\} \end{cases}$$

löst die Gleichung $(\partial_t - \partial_x^2)u = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und hat Anfangswerte gleich Null z.B. auf der Hyperfläche $S = \{(t, x) \colon t = 0, \quad x \in (1, 2)\}$, ist selbst aber ungleich Null für positive t.

Wir können auch ohne Singularität im Nullpunkt auskommen: die Funktion

$$u = u(t, x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

löst die Gleichung $(\partial_t - \partial_x^2)u = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ und hat Anfangswerte $= 0$ für $t = 0$. Siehe [15].

Ansonsten gibt es folgendes positives Resultat. Hierbei bedeutet „reell–analytisch“: in einer Umgebung eines jeden Punktes konvergiert die Taylorreihe gegen die Funktion, aber die Funktion selbst darf auch $\mathbb{C}$–wertig sein.

Satz 3.8 (Cauchy–Kowalewskaja). *Sei S eine Hyperfläche in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $S = \{x \in \Omega \colon \varphi(x) = 0\}$, wobei φ reell–wertig und reell–analytisch ist, und $\operatorname{grad}\varphi \neq 0$ auf S. Sei P ein PDO der Ordnung m mit reell–analytischen Koeffizienten, und S sei nirgends charakteristisch für P. Sei f eine reell–analytische Funktion in Ω, und seien $u_1, \dots, u_{m-1}$ reell–analytische Funktionen auf S. Die Ableitung in Normalenrichtung auf S nennen wir ∂_ν. Dann hat das System*

$$\begin{cases} P(x, D_x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \\ \qquad\quad \partial_\nu^j u(x) = u_j(x), \quad x \in S, \quad j = 0, \dots, m-1 \end{cases}$$

genau eine analytische Umgebung in einer $\mathbb{R}^n$–Umgebung eines jeden Punktes $x_* \in S$.

Beweisidee. Wähle ein $x_* \in S$. Transformiere die Koordinaten in der Nähe von x_* in einer analytischen Weise so, daß x_* auf $0 \in \mathbb{R}^n$ abgebildet wird, und daß S glattgebogen wird zu $S = \{x \in \Omega \colon x_n = 0\}$.

Berechne von der Lösung u (unter der Annahme, daß sie existiert) sämtliche Ableitungen im Nullpunkt. Die Bestimmung der Ableitungen $\partial_{x_n}^N u(0)$ für beliebig große N ist durchführbar, weil S in x_* nicht charakteristisch ist. Damit hat man dann sämtliche Koeffizienten der Taylorreihe von u, entwickelt im Nullpunkt.

Zeige, daß diese Taylorreihe einen positiven Konvergenzradius hat (das ist der schwierigste Teil). □

Bemerkung 3.9. *Schön an diesem Satz ist, daß er für elliptische oder hyperbolische Operatoren gleichermaßen paßt. Aber nicht für parabolische: in [11] wird gezeigt, daß die Taylorreihe bezüglich der Variablen (t, x) der Lösung $u = u(t, x)$ zu*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \qquad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ \quad u(0, x) = \dfrac{1}{1 - \mathrm{i}x}, \qquad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

nur für $t = 0$ konvergieren kann, aber nicht für (t, x) mit $t > 0$.

Bemerkung 3.10. *Die Terme $D_x^\alpha u$ mit $|\alpha| \leq m - 1$ heißen* Terme niederer Ordnung *und dürfen auch nichtlinear auftreten.*

Wir kommen schließlich zu den heutigen Definitionen.

Definition 3.11 (Elliptisch). *Ein Operator $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ mit komplexwertigen Koeffizienten für $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt* elliptisch in $x_* \in \Omega$, *wenn*

$$|P_m(x_*, \xi)| > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \xi \neq 0$$

gilt.

Der Operator P heißt elliptisch in Ω, *wenn er elliptisch in jedem Punkt von Ω ist.*

Der Operator P heißt gleichmäßig elliptisch in Ω, *wenn es ein $c > 0$ gibt mit*

$$|P_m(x, \xi)| \geq c|\xi|^m, \qquad \forall (x, \xi) \in T^*\Omega.$$

Hierbei ist $T^*\Omega$ das Kotangentialbündel.

Wenn die Koeffizienten a_α matrixwertig sein sollten, also $a_\alpha \in C^\infty(\Omega; \mathbb{C}^{N \times N})$, dann ist die gleichmäßige Elliptizität definiert durch die Bedingung

$$|\det P_m(x, \xi)| \geq c|\xi|^{mN}, \qquad \forall (x, \xi) \in T^*\Omega.$$

Beispiel 3.12. *Der Operator $P = \triangle$ hat das Symbol $-|\xi|^2$ und ist also überall gleichmäßig elliptisch.*

Beispiel 3.13. *Der Cauchy–Riemann–Operator $P = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y})$ hat das Symbol $\frac{\mathrm{i}}{2}(\xi + \mathrm{i}\eta)$ und ist auch gleichmäßig elliptisch.*

Definition 3.14 (Hypo–elliptisch). *Ein Operator* $P = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D_x^\alpha$ *mit konstanten Koeffizienten* $a_\alpha \in \mathbb{C}$ *heißt* hypo–elliptisch, *wenn es ein* $C_0 > 0$ *gibt, sodaß für* $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \ge C_0$ *gilt:*

$$|P(\xi)| > 0,$$
$$|\partial_\xi^\alpha P(\xi)| \le C_\alpha |P(\xi)| \cdot |\xi|^{-|\alpha|}, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Beispiel 3.15. *Der parabolische Operator* $P = \partial_{x_0} - \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$ *hat das Symbol* $\mathrm{i}\xi_0 + \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$ *und ist hypo–elliptisch.*

Definition 3.16 (Hyperbolisch). *Ein Differentialoperator* $P(x, D_x) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ *heißt* hyperbolisch am Punkt x_* in Richtung $N \in \mathbb{R}^n$, $(N \neq 0)$, *wenn gilt:*

- $P_m(x_*, N) \neq 0$,
- *die Gleichung* $P_m(x_*, \tau N + \zeta) = 0$ *hat für jedes* $\zeta \in \mathbb{R}^n$ *nur reelle Lösungen* $\tau = \tau(x_*, \zeta)$.

Der Operator P heißt strikt hyperbolisch am Punkt x_* in Richtung N, *wenn zusätzlich gilt: die Lösungen* $\tau_1, \dots, \tau_m$ *sind paarweise verschieden, für* $\zeta \in \mathbb{R}^n$ *mit* $\zeta \perp N$.

Beispiel 3.17. *Sei* $P = \partial_t^2 - \triangle$ *der Operator zur Wellengleichung. Schreibe* x_0 *anstatt* t. *Dann ist dieser Operator strikt hyperbolisch in Richtung* $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{1+n}$.

Beispiel 3.18. *Der* TRICOMI*–Operator* $P = \partial_t^2 - t\triangle$ *ist*

- *strikt hyperbolisch in t–Richtung für* $t > 0$,
- *hyperbolisch in t–Richtung für* $t = 0$,
- *elliptisch für* $t < 0$.

3.3 Ganzraumprobleme

Satz 3.19. *Sei* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Dann existiert genau eine Lösung* $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *mit* $(1 - \triangle)u = f$ *in* $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Wenn $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung ist, dann gilt

$$\hat{f}(\xi) = (1 + |\xi|^2)\hat{u}(\xi), \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Also kann es höchstens eine Lösung $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ geben. Und tatsächlich ist

$$u = u(x) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}x\xi} \frac{1}{1 + |\xi|^2} \hat{f}(\xi)\, đ\xi$$

eine Funktion aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und eine Lösung. □

Satz 3.20. *Sei* $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Dann existiert genau eine Lösung* $u \in C([0, \infty), \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ *zum Problem*

$$\begin{cases} \partial_t u - \triangle u = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Beweis. Sei u eine solche Lösung, dann setzen wir

$$\hat{u}(t, \xi) := (\mathcal{F}_{x \to \xi} u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n_x} e^{-\mathrm{i}x\xi} u(t, x)\, \mathrm{d}x$$

und erhalten

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u} + |\xi|^2 \hat{u} = 0, & (t, \xi) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ \hat{u}(\xi) = \hat{u_0}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

was die Lösung $\hat{u}(t, \xi) = \exp(-t|\xi|^2)\hat{u_0}(\xi)$ besitzt. Daraus folgt die Eindeutigkeit einer Lösung u mit der genannten Glattheit, und tatsächlich ist

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}x\xi - t|\xi|^2} \hat{u_0}(\xi)\, đ\xi$$

eine Lösung mit der gewünschten Regularität. □

Bemerkung 3.21. *Das Anfangswertproblem zum parabolischen Operator $\partial_t - \triangle$ ist nur vorwärts lösbar, nicht rückwärts (2. Hauptsatz der Thermodynamik).*

Man kann die Lösungsdarstellung übrigens noch weiter umformen zu

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n_y} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y)\,\mathrm{d}y.$$

Satz 3.22. *Seien $u_0, u_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ reell–wertig. Dann existiert genau eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ zum Anfangswertproblem der Wellengleichung*

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \triangle)u = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ \quad u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Beweis. Für die Eindeutigkeit genügt es zu zeigen: wenn $u_0 = u_1 \equiv 0$, dann existiert nur die Null-Lösung. Die Multiplikation der Gleichung mit $u_t \in C^1(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ und Integration über $\mathbb{R}^n$ liefert

$$\frac{1}{2}\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} u_t(t,x)^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(t,x)|^2\,\mathrm{d}x = 0,$$

also $E(t) = \text{const.}$, wobei

$$E(t) = \frac{1}{2}\left\|\partial_t u(t,\cdot)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\left\|\nabla u(t,\cdot)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

als Energie bezeichnet wird. Wenn $E(0) = 0$, dann ist auch $E(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also $u \equiv 0$, was die Eindeutigkeit beweist.

Zur Konstruktion der Lösung verwenden wir wie gehabt die Fouriertransformation und entdecken, daß

$$\left(\partial_t^2 + |\xi|^2\right)\hat{u}(t,\xi) = 0,$$

woraus man gewinnt, daß

$$\hat{u}(t,\xi) = \cos(t|\xi|)\hat{u_0}(\xi) + \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{u_1}(\xi), \qquad (t,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Man stellt fest, daß das durch diese Formel erhältliche $u = u(t,x)$ tatsächlich zum Raum $C^2(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ gehört und eine Lösung ist.

Die Lösung kann man auch schreiben in der Form

$$\begin{aligned} u(t,x) = {} & \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}(x\xi + t|\xi|)}\hat{u_0}(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}(x\xi - t|\xi|)}\hat{u_0}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ & + \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}(x\xi + t|\xi|)}\frac{1}{|\xi|}\hat{u_1}(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}(x\xi - t|\xi|)}\frac{1}{|\xi|}\hat{u_1}(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

□

Diese 4 Integrale nennt man auch *Fourier-Integral-Operatoren (FIO)*, angewandt auf u_0 bzw. u_1. Die Terme $x\xi \pm t|\xi|$ im Exponenten heißen *Phasenfunktionen*, und die Faktoren vor den Argumentfunktionen u_0 bzw u_1, also 1 bzw. $\frac{1}{|\xi|}$, heißen *Symbol eines FIO.*

In den drei obigen Problemen (elliptisch, parabolisch, hyperbolisch) haben wir Lösungen u im Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gesucht. Es sind aber auch andere Räume möglich:

Definition 3.23 (Sobolevräume). *Sei $s \geq 0$ eine reelle Zahl. Wir sagen, daß $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ ist, wenn $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist und*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{2s}|\hat{u}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi < \infty.$$

Die Norm im Sobolevraum $H^s(\mathbb{R}^n)$ ist definiert als

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} := \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{2s}|\hat{u}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi}.$$

Satz 3.24. *Die Menge $H^s(\mathbb{R}^n)$ ist ein Banachraum. Eine äquivalente Norm ist gegeben durch $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} := \|\langle\xi\rangle^s\,\hat{u}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_\xi)}$, wobei $\langle\xi\rangle := \sqrt{1+|\xi|^2}$.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Definition 3.25 (Schwache Ableitung). *Sei $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Wenn es eine Funktion $g_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gibt mit*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_\alpha(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\partial_x^\alpha\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, dann sagen wir, daß u die schwache Ableitung *$\partial_x^\alpha u := g_\alpha$ hat.*

Dies ist im Prinzip nichts anderes als die Distributionenableitung, bloß daß wir jetzt verlangen, daß die Ableitung der regulären Distribution u wieder eine *reguläre* Distribution $\partial_x^\alpha u$ ergeben soll.

Satz 3.26. *Es ist $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$, und wenn $s \in \mathbb{N}_+$, dann ist $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn die Distributionenableitungen $\partial_x^\alpha u$ im $L^2(\mathbb{R}^n)$ sind, für alle $|\alpha| \le s$.*

Beweis. Bevor wir mit dem eigentlichen Beweis beginnen, stellen wir eine kleine Rechnung voran.

Sei $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ eine temperierte Distribution. Dann ist $\mathcal{F}(D_x^\alpha f)(\xi) = (D_x^\alpha f)\hat{}(\xi) = \xi^\alpha \hat{f}(\xi)$ als Identität im Distributionenraum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Das könnten wir aus Satz A.35 herausholen, oder auch durch direktes Rechnen. Denn:

Weil $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ist auch $D_x^\alpha f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, und dann auch $\mathcal{F}(D_x^\alpha f) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Sei nun $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(D_x^\alpha f), \varphi\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} &= \langle D_x^\alpha f, \mathcal{F}(\varphi)\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} && \text{wegen Definition 2.28} \\
&= (-1)^{|\alpha|}\langle f, D_x^\alpha \mathcal{F}(\varphi)\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} && \text{wegen Definition 2.16 und Folgerung 2.27} \\
&= \langle f, \mathcal{F}(x^\alpha\varphi(x))\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} && \text{wegen Satz 2.22} \\
&= \langle \mathcal{F}(f), x^\alpha\varphi(x)\rangle_{\mathcal{S}'\times\mathcal{S}} && \text{wegen Definition 2.28} \\
&= \left\langle x^\alpha \hat{f}(x), \varphi(x)\right\rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)}.
\end{aligned}$$

Wenn wir die Variable x zu ξ umbenennen, dann haben wir die gewünschte Identität in der vertrauten Notation.

Nun kehren wir zum Beweis zurück. Sei $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\partial_x^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ für alle $|\alpha| \le s$. Also ist $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion, und nicht nur eine Distribution aus $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Weiterhin ist (wegen der Identität von Plancherel) auch $\mathcal{F}(D_x^\alpha u) \in L^2(\mathbb{R}^n_\xi)$, also ist auch $\xi \mapsto \xi^\alpha \hat{f}u(\xi)$ eine Funktion aus dem $L^2(\mathbb{R}^n)$, wir haben also

$$\int_{\mathbb{R}^n_\xi} |\xi^\alpha\hat{u}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi < \infty, \qquad \forall|\alpha| \le s.$$

Nun ist aber $(1+|\xi|)^{2s} \le C_s\sum_{|\alpha|\le s}|\xi^\alpha|^2$, also auch $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Sei nun umgekehrt $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, und also ist $\hat{u}$ eine Funktion. Nach obiger vorangestellter Rechnung ist dann $\mathcal{F}(\partial_x^\alpha u)$ ebenfalls eine Funktion, nämlich die Funktion $\xi \mapsto \xi^\alpha\hat{u}(\xi)$. Wegen $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ gilt insbesondere $\langle\xi\rangle^s\,\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n_\xi)$. Und aufgrund der Abschätzung $\sum_{|\alpha|\le s}|\xi^\alpha|^2 \le C_s(1+|\xi|)^{2s}$ liegt die Funktion $\xi \mapsto \xi^\alpha\hat{u}(\xi)$ im $L^2(\mathbb{R}^n)$. □

Wenn wir nun diese Sobolevräume für die Untersuchung der oben aufgelisteten partiellen Differentialgleichungen benutzen, bekommen wir:

bei Satz 3.19: wenn $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ und $s \ge 0$, dann ist $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$

bei Satz 3.20: wenn $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ und $s \ge 0$, dann ist $u \in C([0,\infty); H^s(\mathbb{R}^n))$. Es gilt sogar mehr: Seien $s \ge 0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wenn $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, dann ist $u \in C([\varepsilon,\infty); H^s(\mathbb{R}^n))$.

bei Satz 3.22: wenn $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ und $u_1 \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ mit $s \ge 2$, dann ist $u \in C(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^n))$ und $u_t \in C(\mathbb{R}; H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$.

3.4 Partielle Dgln. auf beschränkten Gebieten

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^∞–Rand. Die Voraussetzungen an den Rand können abgeschwächt werden, aber diese technischen Aspekte wollen wir hier nicht weiter verfolgen.

Zunächst verschaffen wir uns Sobolevräume auf Ω.

Definition 3.27 (Sobolevräume). *Sei $s \in \mathbb{N}_0$. Der Raum $H^s(\Omega)$ besteht aus allen Funktion $u \in L^2(\Omega)$, deren Distributionenableitungen $\partial_x^\alpha u$ reguläre Distributionen sind mit darstellenden Funktionen aus dem $L^2(\Omega)$, für alle α mit $|\alpha| \le s$. Die Norm in diesem Raum wird gegeben durch*

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} := \sqrt{\sum_{|\alpha|\le s} \|\partial_x^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

Satz 3.28. *Die Menge $H^s(\Omega)$ ist ein Banachraum.*

Der Raum $H^s(\Omega)$ ist gleich dem Abschluß des Raumes $C^\infty(\overline{\Omega})$ in der $H^s(\Omega)$-Norm. Hierbei besteht der Raum $C^\infty(\overline{\Omega})$ aus allen Funktionen des $C^\infty(\Omega)$, die mitsamt allen ihren Ableitungen stetig auf den Rand $\partial\Omega$ fortgesetzt werden können.

Der Raum $H^s(\Omega)$ ist gleich der Menge der Einschränkungen $f_{|\Omega}$ auf Ω von Funktionen $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Lassen wir weg. □

Nun können wir elliptische und parabolische (und auch hyperbolische) Differentialgleichungen in beschränkten Gebieten behandeln. Dabei begegnen wir einem neuen Phänomen: um die Eindeutigkeit der Lösung zu erreichen, sind zusätzliche Bedingungen an u auf dem Rand des Gebietes vonnöten.

Auf die Beweise verzichten wir.

Satz 3.29 (Laplace-Gleichung mit Dirichlet–Randbedingungen). *Das Problem*

$$\begin{cases} \triangle u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

ist eindeutig lösbar, wenn $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in C(\partial\Omega)$. Dann gehört die Lösung u zum $H^2(\Omega)$, und wir haben die a priori *Abschätzung*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le C_0 \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{C(\partial\Omega)} \right),$$

wobei C_0 nur von Ω abhängt.

Satz 3.30 (Laplace-Gleichung mit Neumann–Randbedingungen). *Seien $f \in C(\overline{\Omega})$ und $g \in C(\partial\Omega)$. Die Ableitung in Außennormalenrichtung von $\partial\Omega$ wird mit ∂_ν bezeichnet. Das Problem*

$$\begin{cases} \triangle u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ \partial_\nu u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

ist genau dann lösbar, wenn

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} g(x)\,\mathrm{d}\sigma.$$

Die Bedingung am Schluß wird einleuchtend, wenn man sich an die Greensche Formel erinnert,

$$\int_\Omega (\triangle v)w + (\nabla v)(\nabla w)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu v \cdot w\,\mathrm{d}\sigma,$$

und darin $w = 1$ setzt.

Satz 3.31. *Sei $T > 0$. Das Problem*

$$\begin{cases} (\partial_t - \triangle)u(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(t,x) = g(x), & (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega \end{cases}$$

ist eindeutig lösbar, wenn $u_0 \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$, und wenn $u_0 = g$ auf $\partial\Omega$ gilt (Kompatibilitätsbedingung).

Dann sind u, u_t, $\partial_x^\alpha u$ Funktionen des $L^2((0,T) \times \Omega)$, für $|\alpha| \le 2$.

Man beachte: bei diesem parabolischen Problem werden (im Unterschied zum elliptischen Problem) keine Werte auf dem gesamten Rand $\partial((0,T) \times \Omega)$ vorgeschrieben, denn der „obere Deckel“ $\{T\} \times \Omega$ bleibt ausgespart. Es ist also tatsächlich notwendig, partielle Differentialoperatoren je nach ihrem Typ unterschiedlich zu behandeln.

3.5 Besondere Effekte

Zum Abschluß betrachten wir einige Phänomene, die nur bei bestimmten Typen von partiellen Differentialgleichungen auftreten, aber nicht bei anderen.

Definition 3.32. *Sei $u \in C^2(\Omega)$ mit $\triangle u = 0$ in Ω. Dann heißt u* harmonisch.

Satz 3.33 (Darstellungsformel von Poisson). *Sei $B = B(0,R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ mit $n \ge 2$, und sei u die Lösung zu*

$$\begin{cases} \triangle u(x) = 0, & x \in B, \\ u(x) = g(x), & x \in \partial B, \end{cases}$$

wobei $g \in C(\partial B)$. Dann wird u gegeben durch

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \int_{y \in \partial B} \frac{g(y)}{|x-y|^n} \, \mathrm{d}\sigma_y, \qquad x \in B,$$

wobei $\omega_n = \operatorname{vol} B(0,1)$ das Volumen der n–dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

Beweis. Siehe [10]. □

Folgerung 3.34 (Analytizität). *Die rechte Seite der Poissonformel ist analytisch in x; also gilt: jede in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ harmonische Funktion ist dort analytisch.*

Folgerung 3.35 (Mittelwerteigenschaft). *Setze $x = 0$, dann folgt*

$$u(0) = \frac{\int_{y \in \partial B} u(y) \, \mathrm{d}\sigma_y}{\int_{y \in \partial B} 1 \, \mathrm{d}\sigma_y},$$

also ist der Wert einer harmonischen Funktion im Kugelmittelpunkt gleich dem arithmetischen Mittel der Werte auf der Kugeloberfläche.

Folgerung 3.36 (Maximumprinzip). *Sei u harmonisch in Ω mit lokalem Maximum in $x_0 \in \Omega$, dann ist u konstant in einer Kugel um x_0, und nach dem Identitätssatz für analytische Funktionen auch in ganz Ω.*

Anders formuliert: nichtkonstante harmonische Funktionen nehmen ihre Extremwerte auf dem Rand des Gebietes an.

Ein typisches Beispiel für harmonische Funktionen sind Real– und Imaginärteil holomorpher Funktionen.

Es gilt sogar noch mehr:

Satz 3.37 (Weylsches **Lemma**). *Sei $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ eine Distributionenlösung zu $\triangle u = 0$, also*

$$\int_\Omega u(x) \triangle \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dann ist $u \in C^2(\Omega)$ und $\triangle u = 0$ im klassischen Sinn.

Beweis. Siehe [10]. □

Nach dem elliptischen Fall untersuchen wir nun den hyperbolischen Fall. Der Prototyp einer hyperbolischen Differentialgleichung im $\mathbb{R}^{1+1}$ ist die Wellengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+1}.$$

Wir transformieren $s = x - t$, $y = x + t$, $u(t,x) = v(s,y)$ und erhalten

$$\begin{aligned} \partial_t &= -\partial_s + \partial_y, \\ \partial_x &= \partial_s + \partial_y, \\ \partial_t^2 - \partial_x^2 &= -4\partial_s\partial_y, \end{aligned}$$

und die Differentialgleichung $\partial_s\partial_y v(s,y) = 0$ hat Lösungen $f(s) + g(y)$, also ist

$$u(t,x) = f(x-t) + g(x+t)$$

allgemeine Lösung zu $u_{tt} - u_{xx} = 0$.

Diese Darstellung interpretieren wir als zwei Wellen, die auf $\mathbb{R}_x$ nach rechts bzw. links mit Geschwindigkeit 1 laufen.

Wir stellen weiterhin fest: diese Darstellungen sind zulässig, wenn die frei wählbaren Funktionen f und g lediglich im C^2 liegen. Dann ist u als Lösung zu $(\partial_t^2 - \partial_x^2)u = 0$ nicht analytisch, im Gegensatz zum elliptischen Fall.

Wenn wir für f eine Sprungfunktion wählen und $g = 0$ setzen, dann erhalten wir

$$u(t,x) = \begin{cases} 1 & : t < x, \\ 0 & : t > x, \end{cases}$$

was man schnell als Distributionenlösung zu $u_{tt} - u_{xx} = 0$ nachweisen kann.

Singularitäten von Lösungen hyperbolischer Differentialgleichungen breiten sich mit endlicher Geschwindigkeit aus.

Und zum Abschluß betrachten wir noch mal den parabolischen Fall:

$$\begin{cases} u_t - \triangle u = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Für dieses Anfangswertproblem hatten wir folgende Lösungsdarstellung angegeben:

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n_y} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y)\,\mathrm{d}y = (K * u_0)(x),$$

wobei K ein von der Zeit abhängiger Glättungskern ist. Damit gilt: wenn u_0 zum $L^1(\mathbb{R}^n)$ gehört, dann ist $u(t,\cdot)$ für positive Zeiten eine glatte Funktion von x.

Singularitäten von Anfangsdaten zu parabolischen Anfangswertproblemen werden geglättet und breiten sich nicht aus.

Kapitel 4

Oszillierende Integrale

Dieses Kapitel orientiert sich an [13].

4.1 Definition

Zunächst ein paar Worte zur Motivation: sei u eine meßbare Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$ mit höchstens polynomialen Wachstum. Dann[1] ist $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, und die Fouriertransformation $\hat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ wird definiert durch

$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} := \langle u, \hat{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} := \int_{\mathbb{R}^n_x} u(x)\hat{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Andererseits erscheint es (mindestens aus Gründen der Ästhetik) wünschenswert, die vertraute Schreibweise

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n_x} e^{-\mathrm{i}x\xi} u(x)\,\mathrm{d}x$$

beizubehalten. Diese ergibt aber keinen Sinn, wenn u für $x \to \infty$ polynomial wächst, auch nicht als uneigentliches Integral $\lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} \dots \mathrm{d}x$.

Stattdessen werden wir sagen: wenn wir obiges $\hat{u}(\xi)$ paaren mit einer Schwartzfunktion φ, dann erhalten wir ein *oszillierendes Integral*

$$\iint_{\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi}} e^{-\mathrm{i}x\xi} u(x)\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x. \tag{4.1}$$

Eine weitere Motivation ist die folgende: sei $A(x, D_x) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ ein Differentialoperator mit glatten und beschränkten Koeffizienten a_α, und sei $a(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ das dazugehörige pseudodifferentielle Symbol. Dann möchten wir die gültige Darstellung

$$(Au)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}x\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,\text{đ}\xi, \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

umformen zu

$$(Au)(x) \overset{?}{=} \iint_{\mathbb{R}^{2n}_{y,\xi}} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} a(x,\xi) u(y)\,\mathrm{d}y\,\text{đ}\xi, \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

haben dabei aber die Schwierigkeit zu bewältigen, daß das Integral auf der rechten Seite nicht existiert, weil $a(x,\xi)$ für $|\xi| \to \infty$ eben nicht abklingt.

[1] gemeint ist: Wenn man u und die von ihr gemaß $T_u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ erzeugte reguläre Distribution T_u nicht mehr unterscheidet, dann ist $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, und die ...

Definition 4.1. *Für $\xi \in \mathbb{R}^n$ sei $\langle \xi \rangle := \sqrt{1+|\xi|^2}$, und es sei weiterhin $\langle D \rangle = \sqrt{1-\triangle}$ als Pseudodifferentialoperator, also*

$$(\langle D \rangle u)(x) := \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}x\xi} \langle \xi \rangle \hat{u}(\xi) \,đ\xi, \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Anschließend läßt sich der Operator $\langle D \rangle$ mittels Dichtheitsargumenten auf Sobolevräume fortsetzen.

Wir kehren zurück zu (4.1). Wir setzen vorübergehend $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ voraus und formen geeignet um, wobei wir beobachten, daß

$$e^{-\mathrm{i}x\xi} = \langle x \rangle^{-k} \langle D_\xi \rangle^k e^{-\mathrm{i}x\xi}, \qquad k \in 2\mathbb{N},$$

und somit ist

$$\begin{aligned}
\langle \hat{u}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} &= \iint_{\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi}} e^{-\mathrm{i}x\xi} u(x)\varphi(\xi) \,\mathrm{d}x \,đ\xi \\
&= \iint_{\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi}} \left(\langle D_\xi \rangle^k e^{-\mathrm{i}x\xi} \right) \left(\langle x \rangle^{-k} u(x) \right) \varphi(\xi) \,\mathrm{d}x \,đ\xi \\
&= \iint_{\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi}} e^{-\mathrm{i}x\xi} \left(\langle x \rangle^{-k} u(x) \right) \left(\langle D_\xi \rangle^k \varphi(\xi) \right) \,\mathrm{d}x \,đ\xi,
\end{aligned}$$

mittels partieller Integration. Wenn nun $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion ist mit $|u(x)| \le C_u \langle x \rangle^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$, dann ergibt die rechte Seite ein konvergentes Integral für $k > N + n$, also ist, für festgehaltenes u, die Abbildung

$$\begin{aligned}
\varphi &\mapsto \iint \ldots \,\mathrm{d}x \,đ\xi, \\
\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{C}
\end{aligned}$$

linear und stetig, also ein Element von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Es ergibt sich dabei natürlich die Frage, ob eine andere Wahl von k dieselbe Abbildung erzeugt.

Um dies zu beantworten, wählen wir einen anderen Weg. Sei $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$. Für eine höchstens polynomial wachsende Funktion u und $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$I_\varepsilon = \iint_{\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi}} e^{-\mathrm{i}x\xi} \chi(\varepsilon x) u(x) \varphi(\xi) \,\mathrm{d}x \,đ\xi.$$

Dann existiert der Grenzwert $\lim_{\varepsilon \to +0} I_\varepsilon$, denn:

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon &= \iint_{\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi}} \left(\langle x \rangle^{-k} \langle D_\xi \rangle^k e^{-\mathrm{i}x\xi} \right) \cdot \chi(\varepsilon x) u(x) \cdot \varphi(\xi) \,\mathrm{d}x \,đ\xi \\
&= \iint_{\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi}} e^{-\mathrm{i}x\xi} \left(\langle x \rangle^{-k} \chi(\varepsilon x) u(x) \right) \left(\langle D_\xi \rangle^k \varphi(\xi) \right) \,\mathrm{d}x \,đ\xi,
\end{aligned}$$

und hier kann man, falls $k \in 2\mathbb{N}$ groß genug ist, den Konvergenzsatz von Lebesgue anwenden und ε nach 0 schicken.

Auf diesem Wege kann man zeigen, daß auch beim ersten Weg verschiedene Wahlen von $k \in 2\mathbb{N}$ mit $k > n + N$ zum selben Integralwert führen.

Jetzt betrachten wir ähnliche Situationen. Dazu betrachten wir ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $u \in C_0^\infty(\Omega)$, die wir uns auf ganz $\mathbb{R}^n$ durch 0 fortgesetzt denken können.

Nun wollen wir Termen der Form

$$I_\Phi(au) := \iint_{\mathbb{R}^N_\theta \times \Omega_x} e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)} a(x,\theta) u(x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\theta \tag{4.2}$$

einen Sinn geben, wobei $\theta \in \mathbb{R}^N$, und a darf für $|\theta| \to \infty$ polyomial wachsen. Wir weisen darauf hin, daß $N \neq n$ erlaubt ist.

Definition 4.2 (Symbolklassen). *Sei $m \in \mathbb{R}$ und $0 \le \delta, \varrho \le 1$. Wir sagen, daß eine Funktion $a = a(x,\theta) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ zur* Symbolklasse $S^m_{\varrho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ *gehört, wenn gilt: zu jeglichen Multi-Indizes α, β und zu jeglichen Kompakta $K \Subset \Omega$ existiert jeweils eine Konstante $C_{\alpha\beta K}$ mit*

$$\left|\partial_\theta^\alpha \partial_x^\beta a(x,\theta)\right| \le C_{\alpha\beta K} \left\langle\theta\right\rangle^{m-\varrho|\alpha|+\delta|\beta|}, \qquad \forall (x,\theta) \in K \times \mathbb{R}^N.$$

Weiterhin setzen wir $S^{-\infty} = \bigcap_{m\in\mathbb{R}} S^m_{\varrho,\delta}$. (Dieser Durchschnitt hängt nicht von ϱ und δ ab.)

Diese Ungleichungen werden auch *Symbolabschätzungen* genannt.

Weil die Konstanten $C_{\alpha\beta K}$ vom Kompaktum K abhängen dürfen, sind für die Funktion a Polstellen beliebig starker Ordnung auf dem Radd $\partial\Omega$ erlaubt (sogenannte lokale Symbolabschätzungen).

Der Standardfall ist $\varrho = 1$, $\delta = 0$, und $C_{\alpha\beta K}$ kann unabhängig von K gewählt werden (globale Symbolabschätzungen).

Definition 4.3 (Phasenfunktion). *Eine Funktion $\Phi = \Phi(x,\theta)$ heißt* Phasenfunktion*, wenn*

- *$\Phi \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}))$, mit Werten in $\mathbb{R}$,*
- *$\Phi(x, t\theta) = t\Phi(x,\theta)$, für alle $(x,\theta) \in \Omega \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ und alle $t > 0$,*
- *Φ hat keine kritischen Punkte für $\theta \ne 0$, also $\operatorname{grad}_{x,\theta} \Phi(x,\theta) \ne 0$ für alle $(x,\theta) \in \Omega \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$.*

Definition 4.4. *Wenn $a \in S^m_{\varrho,\delta}$ und Φ eine Phasenfunktion ist, dann nennen wir den Ausdruck $I_\Phi(au)$* oszillierendes Integral.

Hierbei ist nach wie vor $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Über die Existenz des Ausdrucks $I_\Phi(au)$ als konvergentes Integral wird nichts behauptet.

Beispiel 4.5. *Sei $u = u(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ und $a = a(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ mit $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, wofür wir die Schreibweise*

$$(x,\xi) \in T^*\Omega \setminus 0$$

vereinbaren wollen. Sei $A(x, D_x)$ der zum Symbol a zugeordnete PDO, also $A(x, D_x) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(Au)(y) &= \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}y\xi} a(y,\xi)\hat{u}(\xi)\, đ\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}y\xi} a(y,\xi) \left(\int_{\Omega_x} e^{-\mathrm{i}x\xi} u(x)\, \mathrm{d}x\right) đ\xi \\
&\overset{?}{=} \iint_{\mathbb{R}^n_\xi \times \Omega_x} e^{\mathrm{i}(y-x)\xi} a(y,\xi) u(x)\, \mathrm{d}x\, đ\xi.
\end{aligned}$$

Hierbei ist $\theta \equiv \xi$, y ist lediglich ein Parameter, a hängt nicht von x ab, und offensichtlich ist $\Phi(x,\xi) = (y-x)\xi$ reellwertig und positiv homogen in der Variablen ξ, sowie

$$\operatorname{grad}_{x,\xi} \Phi(x,\xi) = \left(-\xi^\top, (y-x)^\top\right) \ne 0$$

wenn $\xi \ne 0$.

Klar ist: der Operator A ist ein PDO, und $(Au)(y)$ hängt ausschließlich von $u(y)$ und den Ableitungen $(D_y^\alpha u)(y)$ ab. Beim Auswerten von diesem $I_\Phi(au)$ werden in dieser Situation also alle diejenigen x eine besondere Rolle spielen, für die $x = y$. Das annulliert also gerade den zweiten Eintrag von $\operatorname{grad}_{x,\xi} \Phi$. Siehe auch Satz 4.19 und Satz 4.22.

Beispiel 4.6. *Wir betrachten die Differentialgleichung $u_{tt} - u_{xx} = 0$ und ihre beiden Lösungsdarstellungen*

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= f(x-t) + g(x+t), \\
u(t,x) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^1_\xi} e^{\mathrm{i}(x\xi + t|\xi|)} \hat{u_0}(\xi)\, đ\xi + \dots .
\end{aligned}$$

Das letzte Integral schreiben wir um wie folgt:

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^1_\xi} e^{\mathrm{i}(x\xi+t|\xi|)}\hat{u_0}(\xi)\,đ\xi \overset{?}{=} \iint_{\mathbb{R}^2_{y,\xi}} e^{\mathrm{i}((x-y)\xi+t|\xi|)}\cdot\frac{1}{2}\cdot u_0(y)\,\mathrm{d}y\,đ\xi.$$

Hierbei ist $a(x,\theta)=\frac{1}{2}$, $\theta\equiv\xi$, x heißt jetzt y, und die Funktion $\Phi(y,\xi)=(x-y)\xi+t|\xi|$ ist tatsächlich reellwertig und positiv homogen in der Variablen ξ. Weiterhin ist

$$\operatorname{grad}_{y,\xi}\Phi(y,\xi)=\left(-\xi,(x-y)+\frac{\xi}{|\xi|}t\right).$$

Wir vermuten aus obigen Darlegungen, daß diejenigen Punkte (x,y,ξ) eine besondere Rolle spielen werden, für die $(x-y)+\frac{\xi}{|\xi|}t=0$ ist, also $y=x\pm t$. Siehe Satz 4.19 und Satz 4.22.

Das entspricht exakt der Lösungsdarstellung $u(t,x)=f(x-t)+g(x+t)$.

Jetzt können wir uns an die Definition des Ausdrucks $I_\Phi(au)$ in (4.2) herantasten.

Satz 4.7. *Sei Φ eine Phasenfunktion. Dann existiert ein Differentialoperator L auf $\Omega\times\mathbb{R}^N$ der Form*

$$\begin{cases} L=\sum_{j=1}^N a_j(x,\theta)\partial_{\theta_j}+\sum_{k=1}^n b_k(x,\theta)\partial_{x_k}+c(x,\theta),\\ a_j\in S^0_{1,0}(\Omega\times\mathbb{R}^N),\quad b_k\in S^{-1}_{1,0}(\Omega\times\mathbb{R}^N),\quad c\in S^{-1}_{1,0}(\Omega\times\mathbb{R}^N),\\ a_j(x,\theta)=b_k(x,\theta)=0,\quad x\in\Omega,\quad |\theta|\le 1,\end{cases}\tag{4.3}$$

sodaß

$$L^t(x,\theta,\partial_x,\partial_\theta)e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)}=e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)},\qquad (x,\theta)\in\Omega\times(\mathbb{R}^N\setminus 0),\tag{4.4}$$

wobei L^t der formal transponierte Operator zu L ist:

$$(L^tu)(x,\theta)=-\sum_{j=1}^N\partial_{\theta_j}(a_ju)-\sum_{k=1}^n\partial_{x_k}(b_ku)+cu.$$

Hierbei haben wir die verkürzende Schreibweise $\mathbb{R}^N\setminus 0:=\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$ eingeführt.

Bemerkung 4.8. *Aus dem Beweis wird sich ergeben, daß es unendlich viele solche Operatoren L gibt.*

Bemerkung 4.9. *Für den formal transponierten Operator gilt*

$$\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^N}(Lu)v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta=\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^N}u(L^tv)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta,\qquad u,v\in C_0^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^N).$$

Weiterhin ist $(L^t)^t=L$.

Beweis. Wir rechnen schnell nach, daß für $(x,\theta)\in\Omega\times(\mathbb{R}^N\setminus 0)$ gilt:

$$\partial_{\theta_j}e^{\mathrm{i}\Phi}=\mathrm{i}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_j}e^{\mathrm{i}\Phi},\qquad \partial_{x_k}e^{\mathrm{i}\Phi}=\mathrm{i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}e^{\mathrm{i}\Phi},$$

$$\left(-\mathrm{i}\sum_{j=1}^N\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_j}|\theta|^2\partial_{\theta_j}-\mathrm{i}\sum_{k=1}^n\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\partial_{x_k}\right)e^{\mathrm{i}\Phi}=\left(\sum_{j=1}^N|\theta|^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_j}\right)^2+\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\right)^2\right)e^{\mathrm{i}\Phi}$$
$$=:\frac{1}{\psi(x,\theta)}e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)}.$$

Wir sehen, daß $\psi\in C^\infty(\Omega\times(\mathbb{R}^N\setminus 0))$ positiv homogen der Ordnung -2 ist, also $\psi(x,t\theta)=t^{-2}\psi(x,\theta)$ für alle $(x,\theta)\in\Omega\times(\mathbb{R}^N\setminus 0)$ und alle $t>0$.

Damit bekommen wir dann

$$-\mathrm{i}\psi\left(\sum_{j=1}^N|\theta|^2\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_j}\partial_{\theta_j}+\sum_{k=1}^n\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\partial_{x_k}\right)e^{\mathrm{i}\Phi}=e^{\mathrm{i}\Phi}.$$

Damit sind wir fast am Ziel. Das einzige Problem besteht noch darin, daß die Koeffizienten eine Singularität für $\theta = 0$ haben. Um diese wegzuschneiden, führen wir eine Abschneidefunktion ein, $\chi = \chi(\theta) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit $\chi(\theta) = 1$ für $|\theta| \le 1$ und $\chi(\theta) = 0$ für $|\theta| \ge 2$. Dann setzen wir

$$M(x, \theta, \partial_x, \partial_\theta) := -\sum_{j=1}^N (1-\chi(\theta))\mathrm{i}\psi|\theta|^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_j}\partial_{\theta_j} - \sum_{k=1}^n (1-\chi(\theta))\mathrm{i}\psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\partial_{x_k} + \chi(\theta)$$

und stellen fest, daß $Me^{\mathrm{i}\Phi} = e^{\mathrm{i}\Phi}$ für alle $(x, \theta) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$ gilt. Die Koeffizienten von M sind glatt, und sie liegen in den gewünschten Symbolklassen $S^0_{1,0}$ bzw. $S^{-1}_{1,0}$. Schließlich setzen wir $L := M^t$, was den gesuchten Operator ergibt. □

Ein erster Versuch der Definition von $I_\Phi(au)$ verläuft wie folgt: falls $u \in C_0^\infty(\Omega)$ und (vorübergehend:) $a \in C_0^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)$, dann ist

$$\begin{aligned} I_\Phi(au) &= \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^N} \left((L^t)^k e^{\mathrm{i}\Phi}\right) a(x,\theta)u(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta \\ &= \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^N} e^{\mathrm{i}\Phi} L^k(a(x,\theta)u(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Wenn nun $a \in S^m_{\varrho,\delta}$, dann ist $\partial_{\theta_j} a \in S^{m-\varrho}_{\varrho,\delta}$ und $\partial_{x_k} a \in S^{m+\delta}_{\varrho,\delta}$, also $La \in S^{m-\min(\varrho,1-\delta)}_{\varrho,\delta}$. Wir setzen nun

$$s := \min(\varrho, 1-\delta) > 0$$

voraus. Dann ist $L^k(au) \in S^{m-ks}_{\varrho,\delta}$. Wenn jetzt k so groß ist, daß $m - ks < -N$ ist, dann ist die Funktion $\theta \mapsto (L^k(au))(x,\theta)$ integrierbar über $\mathbb{R}^N_\theta$. Also lautet unser erster Definitionsversuch

$$I_\Phi(au) := \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^N} e^{\mathrm{i}\Phi} L^k(au)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta, \qquad a \in S^m_{\varrho,\delta}, \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \quad m - ks < -N.$$

Es ergeben sich einige Fragen, die wir leider nicht sofort beantworten können:

- hängt der Integralwert vielleicht von k ab ?
- hängt der Integralwert vielleicht von der Wahl des Operators L ab ?

Zur Beantwortung unternehmen wir einen zweiten Definitionsversuch. Sei $\chi = \chi(\theta) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit $\chi(\theta) = 1$ für $|\theta| \le 1$ und $\chi(\theta) = 0$ für $|\theta| \ge 2$. Für positives ε setzen wir

$$I_{\Phi,\varepsilon}(au) := \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^N} e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)}\chi(\varepsilon\theta)a(x,\theta)u(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta, \qquad a \in S^m_{\varrho,\delta}, \quad u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Offensichtlich existiert dieses Integral im gewöhnlichen Sinne, und es ist mit obigem Operator L

$$I_{\Phi,\varepsilon}(au) = \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^N} e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)} L^k\left(\chi(\varepsilon\theta)a(x,\theta)u(x)\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta. \tag{4.5}$$

Nun ist $\chi \in S^0_{1,0}$, mit Symbolabschätzungen, die von ε nicht abhängen. Weiterhin ist $u \in S^0_{1,0}$ und $a \in S^m_{\varrho,\delta}$, also gehört die Funktion $(x,\theta) \mapsto \chi(\varepsilon\theta)a(x,\theta)u(x)$ zum $S^m_{\varrho,\delta}$, mit Symbolabschätzungen unabhängig von ε. Falls nun $m - ks < -N$ ist, kann man ε nach $+0$ schicken und den Konvergenzsatz von Lebesgue anwenden.

Wir tragen die erhaltenen Ergebnisse zusammen.

Lemma 4.10. *Sei Φ eine Phasenfunktion auf $\Omega \times \mathbb{R}^N$, und sei $a \in S^m_{\varrho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ mit $0 < \varrho \le 1$ und $0 \le \delta < 1$. Sei $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Sei weiterhin $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ eine Funktion, die in einer Umgebung von $\theta = 0$ identisch gleich 1 ist. Dann existiert der Grenzwert*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \iint_{\Omega \times \mathbb{R}^N} e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)}\chi(\varepsilon\theta)a(x,\theta)u(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta,$$

und er hängt nicht von der Abschneidefunktion χ ab.

Unsere endgültige Definition eines oszillierenden Integrals lautet damit:

Definition 4.11 (Oszillierendes Integral). *Die Funktionen Φ, a, u, χ seien wie im vorigen Lemma gegeben. Dann definieren wir die beiden Schreibweisen*

$$\overset{\mathrm{Os}}{\iint\limits_{\Omega\times\mathbb{R}^N}} e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)}a(x,\theta)u(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta := I_\Phi(au) := \lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^N} e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)}\chi(\varepsilon\theta)a(x,\theta)u(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta,$$

und den entstandenen Integralbegriff taufen wir oszillierendes Integral.

Aus unseren vorigen Darlegungen ergibt sich:

Lemma 4.12. *Sei Φ eine Phasenfunktion auf $\Omega\times\mathbb{R}^N$, und sei $a\in S^m_{\varrho,\delta}(\Omega\times\mathbb{R}^N)$ mit $0<\varrho\le 1$ und $0\le\delta<1$. Sei $u\in C_0^\infty(\Omega)$. Sei $k\in\mathbb{N}$ so groß, daß $m-k\min(\varrho,1-\delta)<-N$, und L sei ein Operator mit (4.3) und (4.4). Dann ist*

$$\overset{\mathrm{Os}}{\iint\limits_{\Omega\times\mathbb{R}^N}} e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)}a(x,\theta)u(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta = \iint_{\Omega\times\mathbb{R}^N} e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)}L^k(a(x,\theta)u(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta.$$

Insbesondere hängt der Integralwert auf der rechten Seite nicht von k oder L ab.

Wir haben sogar noch eine Verfeinerung, die wir gelegentlich benötigen werden:

Lemma 4.13. *Die Funktionen Φ, a, u, χ seien wie im vorigen Lemma gegeben. Ein Differentialoperator L sei gegeben, mit der Gestalt (4.3). Wir setzen voraus, daß für jeden Punkt $(x_0,\theta_0)\in\Omega\times(\mathbb{R}^N\setminus 0)$ mindestens eine der beiden folgenden Bedingungen gilt:*

- $((L^t)^k e^{\mathrm{i}\Phi})(x_0,\theta_0)=e^{\mathrm{i}\Phi(x_0,\theta_0)}$,
- *die Funktion $(x,\theta)\mapsto a(x,\theta)u(x)$ verschwindet im Punkt (x_0,θ_0).*

Dann ist, für genügend großes $k\in\mathbb{N}$,

$$\overset{\mathrm{Os}}{\iint\limits_{\Omega\times\mathbb{R}^N}} e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)}a(x,\theta)u(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta = \iint_{\Omega\times\mathbb{R}^N} e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)}L^k(a(x,\theta)u(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta.$$

Beweis. Für alle $(x,\theta)\in\Omega\times(\mathbb{R}^N\setminus 0)$ haben wir

$$e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)}a(x,\theta)u(x)=\left((L^t)^k e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)}\right)a(x,\theta)u(x).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\overset{\mathrm{Os}}{\iint\limits_{\Omega\times\mathbb{R}^N}} e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)}a(x,\theta)u(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta &= \lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^N} e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)}\chi(\varepsilon\theta)a(x,\theta)u(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta\\
&= \lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^N}\left((L^t)^k e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)}\right)\chi(\varepsilon\theta)a(x,\theta)u(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta\\
&= \lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{\Omega\times\mathbb{R}^N} e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)}L^k(\chi(\varepsilon\theta)a(x,\theta)u(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta\\
&= \iint_{\Omega\times\mathbb{R}^N} e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)}L^k(a(x,\theta)u(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}$$

wie man für genügend große k mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue bekommt. $\square$

4.2 Regularitätseigenschaften

Wir halten Φ und a fest und lassen u variabel. Dann ist die Abbildung

$$u \mapsto I_\Phi(au), \qquad C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$$

offensichtlich linear. Wenn man auf Lemma 4.12 schaut, erkennt man, daß es für $I_\Phi(au)$ eine Darstellung gibt, die höchstens k Ableitungen auf u enthält, also ist diese Abbildung auch stetig in den entsprechenden Topologien von $C_0^\infty(\Omega)$ bzw. $\mathbb{C}$. Es existiert also eine Distribution $A \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit

$$I_\Phi(au) = \langle A, u\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}, \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{4.6}$$

Wir interessieren uns jetzt für sing-supp A.

Definition 4.14. *Für eine Phasenfunktion Φ auf $\Omega \times \mathbb{R}^N$ setzen wir*

$$C_\Phi := \left\{(x,\theta) \in \Omega \times (\mathbb{R}^N \setminus 0)\colon \operatorname{grad}_\theta \Phi(x,\theta) = 0\right\}.$$

Weil Φ positiv homogen in der Variablen θ von der Ordnung 1 ist, ist die Menge C_Φ eine *konische Menge*.

Definition 4.15 (Konische Menge). *Eine Menge $C \subset \Omega \times (\mathbb{R}^N \setminus 0)$ heißt* konisch*, wenn gilt: falls $(x,\theta) \in C$ und $t > 0$, dann auch $(x, t\theta) \in C$.*

Bemerkung 4.16. *In diesem Zusammenhang erinnern wir an die* Euler–Differentialgleichung*:*
Falls $p = p(y)\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ positiv homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$ ist, also $p(ty) = t^\alpha p(y)$ für alle $(t,y) \in \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^N \setminus 0)$, dann ist

$$y \cdot \operatorname{grad} p(y) = \alpha p(y), \qquad y \in \mathbb{R}^N \setminus 0.$$

Hierbei steht auf der linken Seite das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^N$.

Definition 4.17 (Konische Umgebung). *Sei $C \subset \Omega \times (\mathbb{R}^N \setminus 0)$ eine konische Menge. Eine Menge $D \subset \Omega \times (\mathbb{R}^N \setminus 0)$ heißt* konische Umgebung von C*, wenn gilt:*

- *D ist eine offene Menge in $\Omega \times (\mathbb{R}^N \setminus 0)$, und zwar eine Umgebung von C, d.h. $\overline{C} \subset D$, wobei $\overline{C}$ den Abschluß in der auf $\Omega \times (\mathbb{R}^N \setminus 0)$ induzierten Topologie bezeichnet,*
- *D ist eine konische Menge.*

Diesen Begriff brauchen wir für den Beweis von Satz 4.19, der uns den singulären Träger von A beschreib

Definition 4.18. *Sei π die kanonische Projektion*

$$\pi\colon \Omega \times (\mathbb{R}^N \setminus 0) \to \Omega,$$
$$\pi\colon (x,\theta) \mapsto x.$$

Dann definieren wir

$$S_\Phi := \pi C_\Phi, \qquad R_\Phi := \Omega \setminus C_\Phi.$$

Satz 4.19. *Es ist* sing-supp $A \subset S_\Phi$*, bzw. $A \in C^\infty(R_\Phi)$.*

Die letzte Formulierung soll natürlich bedeuten: auf R_Φ ist die Distribution A gleich einer glatten Funktion $\tilde{A} \in C^\infty(R_\Phi)$ im Sinne von $\langle A, u\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} = \int_\Omega \tilde{A}(x)u(x)\,\mathrm{d}x$ für alle $u \in C_0^\infty(R_\Phi)$.

Beweis. Es genügt, eine solche Funktion $\tilde{A}$ zu konstruieren.
Wir setzen

$$\tilde{A}(x) := \overset{\mathrm{Os}}{\int\limits_{\mathbb{R}^N}} e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)} a(x,\theta)\,\mathrm{d}\theta, \qquad x \in R_\Phi.$$

Hierbei ist x lediglich ein Parameter. Man beachte dabei, daß für $x \in R_\Phi$ die Phasenfunktion $\theta \mapsto \Phi(x,\theta)$ keine stationären Punkte hat, wegen der Konstruktion von R_Φ. Die Definition von $\overset{\mathrm{Os}}{\int}$ erfolgt sinngemäß genauso wie die Definition von $\overset{\mathrm{Os}}{\iint}$, man läßt die Integration über der x–Variablen weg. Der auftauchende Operator L wie in (4.3) enthält jetzt keinerlei Ableitungen bzgl. der Variablen x. Damit ist nun, für ein geeignet großes k,

$$\tilde{A}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)} L^k a(x,\theta)\,\mathrm{d}\theta, \qquad x \in R_\Phi.$$

Diese Funktion ist auf R_Φ glatt. Sei jetzt $u \in C_0^\infty(R_\Phi)$. Dann haben wir, weil L nur nach den Variablen θ_j differenziert, aber nicht nach den Variablen x_k,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \tilde{A}(x)u(x)\,\mathrm{d}x &= \iint_{\Omega\times\mathbb{R}^N} e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)} \left(L^k a(x,\theta)\right) u(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta \\
&= \iint_{\Omega\times\mathbb{R}^N} e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)} L^k \left(a(x,\theta)u(x)\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta \\
&= \overset{\mathrm{Os}}{\iint\limits_{\Omega\times\mathbb{R}^N}} e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)} a(x,\theta)u(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta \\
&= I_\Phi(au) = \langle A, u\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)},
\end{aligned}$$

wegen Lemma 4.13 in der vorletzten Zeile. Dazu beachte man, daß die Funktion $(x,\theta) \mapsto a(x,\theta)u(x)$ in einer konischen Umgebung von C_Φ identisch gleich 0 ist, wegen $u \in C_0^\infty(R_\Phi)$. Die Koeffizienten des Operators L sind zunächst nur auf $R_\Phi \times (\mathbb{R}^N \setminus 0)$ definiert. In einer winzigen konischen Umgebung von C_Φ kann man diese Koeffizienten beliebig definieren; wegen $u \equiv 0$ in einer Umgebung von S_Φ hat die tatsächliche Wahl der Koeffizienten keinen Einfluß auf das Ergebnis. □

Diesen Beweisgedanken wenden wir gleich nochmal an:

Satz 4.20. *Sei $a \in S^m_{\varrho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^N)$, und sei $a \equiv 0$ in einer konischen Umgebung von C_Φ. Dann ist $A \in C^\infty(\Omega)$.*

Diese Behauptung bedeutet natürlich: es gibt eine Funktion $\tilde{A} \in C^\infty(\Omega)$, sodaß $\langle A, u\rangle = \int_\Omega \tilde{A}(x)u(x)\,\mathrm{d}x$ für alle $u \in C_0^\infty(\Omega)$ ist. Für $x \in R_\Phi$ ist der Funktionswert $\tilde{A}(x)$ bereits im vorigen Satz ermittelt worden.

Beweis. Außerhalb von C_Φ ist $\operatorname{grad}_\theta \Phi(x,\theta) \neq 0$. Wir können also außerhalb von C_Φ den Differentialoperator L so konstruieren, daß er nur nach θ differenziert, aber nicht nach x. Und in einer konischen Umgebung von C_Φ ist die Funktion $(x,\theta) \mapsto a(x,\theta)u(x)$ identisch gleich 0. Es bleibt bloß noch übrig, den Operator L auf der Menge C_Φ (bzw. in einer winzigen konischen Umgebung davon) festzulegen. Das können wir auf beliebige Weise tun, wenn nur diese winzige konische Umgebung kleiner ist als diejenige, in der $a \equiv 0$ gilt. Anschließend wende man Lemma 4.13 an. Wir haben also, für $u \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\langle A, u\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} = \iint_{\Omega\times\mathbb{R}^N} e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)} L^k(a(x,\theta)u(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta.$$

Hierbei gilt: der Operator L kann höchstens für solche (x,θ) Ableitungen nach x bewirken, für die $a(x,\theta) = 0$ ist, und sämtliche Ableitungen von a sind dort auch gleich 0. Auf jeden Fall kommen beim letzten Integral keine x–Ableitungen bei der Funktion $u = u(x)$ an. Damit ist

$$\tilde{A}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{\mathrm{i}\Phi(x,\theta)} L^k a(x,\theta)\,\mathrm{d}\theta, \qquad x \in \Omega,$$

die gesuchte Funktion. Weil die Koeffizienten von L zum C^∞ gehören, und weil $a \in S^m_{\varrho,\delta}$ ebenfalls glatt ist, haben wir $\tilde{A} \in C^\infty(\Omega)$, wie gewünscht. □

Beispiel: Wir betrachten den Operator id, der $u \in C_0^\infty(\Omega)$ auf u abbildet. Wir denken uns u auf den ganzen $\mathbb{R}^n$ durch 0 fortgesetzt. Dann ist

$$(\mathrm{id}\, u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}\xi} \cdot 1 \cdot \hat{u}(\xi)\,\text{đ}\xi = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \int_{\mathbb{R}^n_y} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} \cdot 1 \cdot u(y)\,\mathrm{d}y\,\text{đ}\xi.$$

Wir haben hier x als Parameter, $a = a(y, \xi) = 1 \in S^0_{1,0}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, $\Phi(y, \xi) = (x - y)\xi$,

$$C_\Phi = \{(y, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0) \colon \operatorname{grad}_\xi \Phi(y, \xi) = 0\} = \{(x, \xi) \colon \xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0\},$$

$S_\Phi = \{x\}$, und tatsächlich ist

$$u(x) = \langle \delta_x(y), u(y) \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_y) \times \mathcal{D}(\Omega)} = \langle A, u \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)},$$

wobei δ_x die an den Ort x verschobene Delta-Distribution ist. Es ist also tatsächlich für diesen Operator $\operatorname{sing-supp} A = \{x\} = S_\Phi$.

Beispiel: Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und f sei ein Glättungskern, also $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f(x) \geq 0$ überall, $f(0) > 0$, und $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Wir betrachten den Operator

$$P \colon u \mapsto Pu := f * u.$$

Nun ist $f(z) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}z\xi} \hat{f}(\xi)\,\text{đ}\xi$, also

$$(Pu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_y} f(x - y) u(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \int_{\mathbb{R}^n_y} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} \hat{f}(\xi) u(y)\,\mathrm{d}y\,\text{đ}\xi.$$

Hierbei ist x ein Parameter, $a = a(y, \xi) = \hat{f}(\xi) \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $\Phi(y, \xi) = (x - y)\xi$ wie im vorigen Beispiel, und also auch $S_\Phi = \{x\}$. Andererseits ist

$$(Pu)(x) = \langle f(x - y), u(y) \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_y) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_y)},$$

also $\tilde{A}(y) = f(x - y)$. Demnach ist $\operatorname{sing-supp} A = \emptyset \subset S_\Phi$.

4.3 Fourier-Integral-Operatoren

Wir kommen jetzt zu allgemeinen Fourier-Integral-Operatoren (FIO). Als Einstimmung betrachten wir PDO P und Q mit Koeffizienten $a_\alpha \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n_x)$:

$$\begin{aligned}
(P(x, D_x)u)(x) &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha u(x), \\
(Q(x, D_x)u)(x) &= \sum_{|\alpha| \leq m} D_x^\alpha \left(a_\alpha(x) u(x) \right),
\end{aligned}$$

wobei der Einfachheit halber $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ angenommen wird (Sobolevräume wären auch möglich). Dann ist

$$\begin{aligned}
(Pu)(x) &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \mathcal{F}^{-1}_{\xi \mapsto x} \left(\xi^\alpha \hat{u}(\xi) \right) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}x\xi} \sum_\alpha a_\alpha(x) \xi^\alpha \hat{u}(\xi)\,\text{đ}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \int_{\mathbb{R}^n_y} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \right) u(y)\,\mathrm{d}y\,\text{đ}\xi, \\
(Qu)(x) &= \sum_{|\alpha| \leq m} \mathcal{F}^{-1}_{\xi \mapsto x} \left(\xi^\alpha (a_\alpha u)\widehat{\ }(\xi) \right) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}x\xi} \sum_\alpha \xi^\alpha (a_\alpha u)\widehat{\ }(\xi)\,\text{đ}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \int_{\mathbb{R}^n_y} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(y) \xi^\alpha \right) u(y)\,\mathrm{d}y\,\text{đ}\xi.
\end{aligned}$$

Damit erscheint es sinnvoll, Integrale der Form

$$(\mathcal{A}u)(x) = \iint_{\Omega_y \times \mathbb{R}^N_\theta} e^{\mathrm{i}\Phi(x,y,\theta)} a(x, y, \theta) u(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\theta \tag{4.7}$$

zu untersuchen, wobei

$$x \in \Omega_x \subset \mathbb{R}^{n_x}, \qquad y \in \Omega_y \subset \mathbb{R}^{n_y},$$
$$u \in C_0^\infty(\Omega_y),$$
$$a \in S^m_{\varrho,\delta}((\Omega_x \times \Omega_y) \times (\mathbb{R}^N \setminus 0)),$$

und Φ ist eine Phasenfunktion auf $(\Omega_x \times \Omega_y) \times (\mathbb{R}^N \setminus 0)$.

Es ist noch nicht ganz klar, in welchem Sinne $(\mathcal{A}u)(x)$ existiert. Sei $v \in C_0^\infty(\Omega_x)$ gewählt, dann definieren wir

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle := \overset{\mathrm{Os}}{\iiint\limits_{\Omega_x \times \Omega_y \times \mathbb{R}^N}} e^{\mathrm{i}\Phi(x,y,\theta)} a(x,y,\theta) u(y) v(x) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\theta. \tag{4.8}$$

Diese Definition ist möglich, weil Φ auf dem Integrationsgebiet die Voraussetzungen einer Phasenfunktion erfüllt, und $a \in S^m_{\varrho,\delta}$ mit den (ab jetzt selbstverständlichen) Voraussetzungen $\varrho > 0$ und $\delta < 1$.

Wir halten Φ, a und u fest. Dann ist die Abbildung

$$\begin{cases} \quad v \mapsto \langle \mathcal{A}u, v\rangle\,, \\ \mathcal{D}(\Omega_x) \to \mathbb{C} \end{cases}$$

linear und stetig in den jeweiligen Topologien, also ist $\mathcal{A}u$ ein Element von $\mathcal{D}'(\Omega_x)$.

Jetzt halten wir Φ und a fest, vergessen v, und variieren u. Wir prüfen nach, daß

$$\mathcal{A}\colon u \mapsto \mathcal{A}u,$$
$$\mathcal{A}\colon \mathcal{D}(\Omega_y) \to \mathcal{D}'(\Omega_x)$$

linear und stetig in den betreffenden Topologien ist.

Definition 4.21 (FIO). *Sei Φ eine Phasenfunktion auf $(\Omega_x \times \Omega_y) \times (\mathbb{R}^N \setminus 0)$, $a \in S^m_{\varrho,\delta}((\Omega_x \times \Omega_y) \times \mathbb{R}^N)$ mit $0 < \varrho \le 1$ und $0 \le \delta < 1$. Dann heißt der Operator $\mathcal{A}$, der $u \in \mathcal{D}(\Omega_y)$ auf $\mathcal{A}u \in \mathcal{D}'(\Omega_x)$ gemäß (4.8) abbildet, ein* Fourier-Integral-Operator (FIO)*.*

Vorübergehend fassen wir die Variablen zusammen:

$$z = (x,y) \in \Omega_z := \Omega_x \times \Omega_y.$$

Dann ist

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle = \overset{\mathrm{Os}}{\iint\limits_{\Omega_z \times \mathbb{R}^N}} e^{\mathrm{i}\Phi(z,\theta)} a(z,\theta)(uv)(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta$$

ein herkömmliches oszillierendes Integral, und es existiert (im Sinne von (4.6)) ein $A \in \mathcal{D}'(\Omega_z)$ mit

$$\langle A, w\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_z)\times\mathcal{D}(\Omega_z)} = \overset{\mathrm{Os}}{\iint\limits_{\Omega_z \times \mathbb{R}^N}} e^{\mathrm{i}\Phi(z,\theta)} a(z,\theta) w(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta, \qquad \forall w \in \mathcal{D}(\Omega_z).$$

Übrigens ist A nichts anderes als der Schwartzkern des Operators $\mathcal{A}$, wie er uns gegeben wird durch Theorem 2.32, Teil 2.

Aus Satz 4.19 und Satz 4.20 erhalten wir dann:

Satz 4.22. *Sei $\pi\colon (\Omega_x \times \Omega_y) \times (\mathbb{R}^N \setminus 0) \to (\Omega_x \times \Omega_y)$ die kanonische Projektion mit $\pi(x,y,\theta) = (x,y)$, und sei*

$$C_\Phi := \left\{(x,y,\theta) \in \Omega_x \times \Omega_y \times (\mathbb{R}^N \setminus 0)\colon\ \operatorname{grad}_\theta \Phi(x,y,\theta) = 0\right\},$$
$$S_\Phi := \pi C_\Phi.$$

Dann ist die Distribution $A \in \mathcal{D}'(\Omega_x \times \Omega_y)$ gleich einer C^∞–Funktion $\tilde{A}$ außerhalb S_Φ; und wenn $a(x,y,\theta)$ identisch Null in einer konischen Umgebung von S_Φ ist, dann ist $A \in C^\infty(\Omega_x \times \Omega_y)$.

Bemerkung 4.23. *Damit haben wir insgesamt: zu jeder Phasenfunktion $\Phi = \Phi(x, y, \theta)$ und jeder (sogenannten)* Amplitudenfunktion *$a = a(x, y, \theta)$ existiert genau ein Operator $\mathcal{A}\colon \mathcal{D}(\Omega_y) \to \mathcal{D}'(\Omega_x)$, sowie genau ein Schwartz-Kern $A \in \mathcal{D}'(\Omega_x \times \Omega_y)$.*

Es gibt aber mehrere Amplitudenfunktionen, die denselben FIO $\mathcal{A}$ erzeugen. Nimm z.B. $\Omega_x = \Omega_y = \mathbb{R}^n$, $\theta = \xi \in \mathbb{R}^n$, sowie $\Phi(x, y, \xi) = (x - y)\xi$. Dann sei $a(x, y, \xi) \equiv 0$, und wir erhalten den Null-Operator $\mathcal{A}$. Sei andererseits $a(x, y, \xi) = \varphi(x)\psi(y)$ mit $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, aber $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\psi = \emptyset$. Dann ist

$$(\mathcal{A}u)(x) = \iint_{\mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} \varphi(x)\psi(y)u(y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{đ}\xi = \varphi(x)\psi(x)u(x),$$

was aber immer gleich 0 ist.

Unsere bisher gezeigte Abbildungseigenschaft lautet:

$$\text{wenn} \quad \operatorname{grad}_{x,y,\theta} \Phi \neq 0 \ \text{ überall, dann ist } \ \mathcal{A}\colon \mathcal{D}(\Omega_y) \to \mathcal{D}'(\Omega_x) \ \text{ stetig.}$$

Das erscheint uns etwas armselig, weshalb wir jetzt die Voraussetzungen an Φ verschärfen.

Definition 4.24 (Operator-Phasenfunktion). *Eine Phasenfunktion Φ auf $(\Omega_x \times \Omega_y) \times (\mathbb{R}^N \setminus 0)$ heißt* Operator-Phasenfunktion*, wenn zusätzlich gilt:*

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{grad}_{y,\theta} \Phi(x, y, \theta) \neq 0, \\ &\operatorname{grad}_{x,\theta} \Phi(x, y, \theta) \neq 0, \end{aligned}\right\} \quad \forall (x, y, \theta) \in \Omega_x \times \Omega_y \times (\mathbb{R}^N \setminus 0).$$

Satz 4.25. *Unter der ersten Zusatzbedingung ist $\mathcal{A}$ sogar eine stetige Abbildung von $\mathcal{D}(\Omega_y)$ nach $\mathcal{E}(\Omega_x)$. Unter der zweiten Zusatzbedingung hat $\mathcal{A}$ eine stetige Fortsetzung[2] von $\mathcal{E}'(\Omega_y)$ nach $\mathcal{D}'(\Omega_x)$.*

Beweis. Sei $\operatorname{grad}_{y,\theta} \Phi(x, y, \theta) \neq 0$ überall. Dann existiert das Integral

$$(\mathcal{A}u)(x) = \overset{\mathrm{Os}}{\iint\limits_{\Omega_y \times \mathbb{R}^N_\theta}} e^{\mathrm{i}\Phi(x,y,\theta)} a(x, y, \theta)u(y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}\theta, \qquad u \in \mathcal{D}(\Omega_y),$$

für jedes $x \in \Omega_x$, und es stimmt mit dem durch (4.8) implizit gegeben $\mathcal{A}u$ überein. Die Ableitungen $\partial_x^\alpha(\mathcal{A}u)(x)$ existieren, und sie sind wieder gegeben durch oszillierende Integrale von derselben Gestalt. Also ist $\mathcal{A}u \in \mathbb{C}^\infty(\Omega_x)$. Die Stetigkeit von $\mathcal{A}$, als Abbildung von $\mathcal{D}(\Omega_y)$ nach $\mathcal{E}(\Omega_x)$, zeigt man leicht.

Sei nun $\operatorname{grad}_{x,\theta} \Phi(x, y, \theta) \neq 0$ überall. Für $u \in \mathcal{D}(\Omega_y)$ und $v \in \mathcal{D}(\Omega_x)$ ist, per Definitionsgleichung (4.8),

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}u, v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_x) \times \mathcal{D}(\Omega_x)} &= \overset{\mathrm{Os}}{\iiint\limits_{\Omega_x \times \Omega_y \times \mathbb{R}^N}} e^{\mathrm{i}\Phi(x,y,\theta)} a(x, y, \theta)u(y)v(x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}\theta \\ &= \lim_{\varepsilon \to +0} \iiint_{\Omega_x \times \Omega_y \times \mathbb{R}^N} e^{\mathrm{i}\Phi(x,y,\theta)} \chi(\varepsilon\theta) a(x, y, \theta)u(y)v(x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}\theta \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_y} \left(\iint_{\Omega_x \times \mathbb{R}^N_\theta} e^{\mathrm{i}\Phi(x,y,\theta)} \chi(\varepsilon\theta) a(x, y, \theta)v(x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\theta \right) u(y) \,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Man beachte, daß (wegen der zweiten Zusatzvoraussetzung) der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\Omega_x \times \mathbb{R}^N_\theta} e^{\mathrm{i}\Phi(x,y,\theta)} \chi(\varepsilon\theta) a(x, y, \theta)v(x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\theta$$

existiert. Wir taufen ihn $(\mathcal{A}^t v)(y)$. Wegen des ersten Beweisteils haben wir die Stetigkeit der Abbildung

$$\mathcal{A}^t\colon v \mapsto \overset{\mathrm{Os}}{\iint\limits_{\Omega_x \times \mathbb{R}^N_\theta}} e^{\mathrm{i}\Phi(x,y,\theta)} a(x, y, \theta)v(x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}\theta,$$

$$\mathcal{A}^t\colon \mathcal{D}(\Omega_x) \to \mathcal{E}(\Omega_y).$$

[2] Diese Fortsetzung bezeichnen wir wieder mit $\mathcal{A}$.

Wenn wir jetzt in der obigen Rechnung $\lim_{\varepsilon\to+0}$ und $\int_{\Omega_y}$ vertauschen (Begründung bitte selbst einfügen), dann haben wir gezeigt, daß für $u \in \mathcal{D}(\Omega_y)$ und $v \in \mathcal{D}(\Omega_x)$ gilt:

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_x)\times\mathcal{D}(\Omega_x)} = \left\langle u, \mathcal{A}^t v\right\rangle_{\mathcal{E}'(\Omega_y)\times\mathcal{E}(\Omega_y)}.$$

Das motiviert die oben eingeführte Schreibweise $\mathcal{A}^t$ nachträglich.

Sei nun $u \in \mathcal{E}'(\Omega_y)$. Dann definieren wir $\mathcal{A}u \in \mathcal{D}'(\Omega_x)$ durch

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_x)\times\mathcal{D}(\Omega_x)} := \left\langle u, \mathcal{A}^t v\right\rangle_{\mathcal{E}'(\Omega_y)\times\mathcal{E}(\Omega_y)}, \qquad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega_x).$$

Das ist eine stetige Fortsetzung, denn wenn $u \in \mathcal{E}'(\Omega_y)$ zufällig in $\mathcal{D}(\Omega_y)$ liegen sollte, steht eine bekannte Identität da. Und ansonsten wählen wir eine Folge $(u_1, u_2, \dots) \subset \mathcal{D}(\Omega_y)$ mit

$$u_j \overset{\mathcal{E}'(\Omega_y)}{\longrightarrow} u, \qquad (j\to\infty),$$

und es ist

$$\langle \mathcal{A}u_j, v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_x)\times\mathcal{D}(\Omega_x)} = \left\langle u_j, \mathcal{A}^t v\right\rangle_{\mathcal{E}'(\Omega_y)\times\mathcal{E}(\Omega_y)} \overset{\mathbb{C}}{\longrightarrow} \left\langle u, \mathcal{A}^t v\right\rangle_{\mathcal{E}'(\Omega_y)\times\mathcal{E}(\Omega_y)}, \qquad (j\to\infty),$$

denn genauso ist Konvergenz in der Topologie $\mathcal{E}'(\Omega_y)$ definiert. □

Wie stehen nun sing-supp($\mathcal{A}u$) und sing-supp u in Beziehung ?

Definition 4.26. *Seien X und Y Mengen, und sei $S \subset X\times Y$ sowie $K \subset Y$. Dann definieren wir*

$$S\circ K := \{x \in X : \exists y \in K \text{ mit } (x,y) \in S\}.$$

Satz 4.27. *Für $u \in \mathcal{E}'(\Omega_y)$ ist* sing-supp$(\mathcal{A}u) \subset S_\Phi \circ$ sing-supp u.

Beweis. Sei $u \in \mathcal{E}'(\Omega_y)$. Nun ist sing-supp u eine abgeschlossene Teilmenge von Ω_y. Wir wählen ein $\chi \in C_0^\infty(\Omega_y)$ für daß supp χ ein wenig größer als sing-supp u ist, mit $\chi(y) = 1$ für jedes y in einer Umgebung von sing-supp u. Im Sinne der Multiplikation von Distributionen mit glatten Funktionen setzen wir

$$u(y) = u_1(y) + u_2(y) = \chi(y)u(y) + (1-\chi(y))u(y).$$

Nun ist $u_2 \in C_0^\infty(\Omega_y)$ und somit $\mathcal{A}u_2 \in C^\infty(\Omega_x)$, folglich sing-supp$(\mathcal{A}u)$ = sing-supp$(\mathcal{A}u_1)$.

Es reicht also zu zeigen, daß

$$\text{sing-supp}(\mathcal{A}u) \subset S_\Phi \circ \operatorname{supp} u, \qquad \forall u \in \mathcal{E}'(\Omega_y),$$

denn die Differenzmenge supp $u \setminus$ sing-supp u kann beliebig „schmal" gemacht werden, durch geeignete Wahl von χ.

Sei ein Kompaktum $K \Subset \Omega_y$ gegeben. Es reicht weiterhin zu zeigen:

$$\text{sing-supp}(\mathcal{A}u) \subset S_\Phi \circ K, \qquad \forall u \in \mathcal{E}'(\Omega_y), \quad \operatorname{supp} u \Subset K.$$

Das ist äquivalent zu der Behauptung, daß $\mathcal{A}u$ gleich einer glatten Funktion außerhalb von $S_\Phi\circ K$ ist, für alle $u \in \mathcal{E}'(\Omega_y)$ mit supp $u \Subset K$. Sei nun also eine Menge $\tilde\Omega_x \subset \Omega_x$ gegeben, die außerhalb von $S_\Phi \circ K$ liegt.

Wir wählen eine Folge $(u_1, u_2, \dots) \subset \mathcal{D}(\Omega_y)$ mit supp $u_j \Subset K$ und

$$u_j \overset{\mathcal{E}'(\Omega_y)}{\longrightarrow} u, \qquad (j\to\infty). \tag{4.9}$$

Dann ist, für $v \in \mathcal{D}(\tilde\Omega_x)$,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}u, v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_x)\times\mathcal{D}(\Omega_x)} &= \lim_{j\to\infty} \langle \mathcal{A}u_j, v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_x)\times\mathcal{D}(\Omega_x)}\\ &= \lim_{j\to\infty} \langle \mathcal{A}u_j, v\rangle_{\mathcal{D}'(\tilde\Omega_x)\times\mathcal{D}(\tilde\Omega_x)}\\ &= \lim_{j\to\infty} \langle A, v\otimes u_j\rangle_{\mathcal{D}'(\tilde\Omega_x\times(\operatorname{int} K))\times\mathcal{D}(\tilde\Omega_x\times(\operatorname{int} K))},\end{aligned}$$

wegen des Theorems 2.32 im letzten Schritt.

Wegen Satz 4.22 ist nun $\operatorname{sing-supp} A \subset S_\Phi$. Wir wollen zeigen, daß auf dem relevanten Integrationsgebiet $\tilde{\Omega}_x \times (\operatorname{int} K)$ kein Punkt aus $\operatorname{sing-supp} A$ liegt. Dazu beweisen wir

$$S_\Phi \bigcap \left(\tilde{\Omega}_x \times (\operatorname{int} K)\right) = \emptyset.$$

Denn sei $(x_0, y_0) \in S_\Phi \cap (\tilde{\Omega}_x \times (\operatorname{int} K))$. Dann ist $x_0 \in \tilde{\Omega}_x$ und $y_0 \in \operatorname{int} K$. Wegen $(x_0, y_0) \in S_\Phi$ ist dann aber auch $x_0 \in S_\Phi \circ \operatorname{int} K$, denn so ist die Operation $\circ$ definiert. Andererseits soll $\tilde{\Omega}_x$ außerhalb von $S \circ K$ sein, und x_0 soll in $\tilde{\Omega}_x$ liegen. Das kann nicht sein.

Also ist der Schwartz–Kern A auf dem relevanten Integrationsgebiet $\tilde{\Omega}_x \times (\operatorname{int} K)$ gleich einer glatten Funktion. Nun bringen wir Satz 2.34 ins Spiel. Dann erzeugt A einen glättenden Operator

$$\mathcal{A} \colon \mathcal{E}'(\operatorname{int} K) \to \mathcal{E}(\tilde{\Omega}_x).$$

Dies ist derselbe Operator $\mathcal{A}$ wie oben, bloß eingeschränkt auf ein kleineres Gebiet $\operatorname{int} K \subset \Omega_y$, und ausgewertet auf einem kleineren Gebiet $\tilde{\Omega}_x$.

Wegen (4.9) und der Stetigkeit von $\mathcal{A}$ in den betreffenden Topologien ist nun auch

$$\mathcal{A}u_j \xrightarrow{\mathcal{E}(\tilde{\Omega}_x)} \mathcal{A}u, \qquad (j \to \infty),$$

also ist $\mathcal{A}u \in C^\infty(\tilde{\Omega}_x)$.

Also ist $\mathcal{A}u$ gleich einer glatten Funktion außerhalb von $S_\Phi \circ K$. Das wollten wir zeigen. □

Beispiel 4.28 (PDO). *Sei*

$$(\mathcal{A}u)(x) := \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D_x^\alpha u(x),$$

auf dem Gebiet $\Omega = \Omega_x = \Omega_y$ *mit glatten Koeffizienten* $a_\alpha \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, *also*

$$(\mathcal{A}u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi \Omega_y} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} a(x,\xi) u(y)\, dy\, đ\xi,$$

wobei $a(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$. *Dann ist*

$$\begin{aligned}
&\Phi(x,y,\xi) = (x-y)\xi, \\
&C_\Phi = \{(x,y,\xi) \colon (x-y) = 0\} = \operatorname{diag}(\Omega \times \Omega) \times (\mathbb{R}^n \setminus 0), \\
&S_\Phi = \operatorname{diag}(\Omega \times \Omega) = \{(x,x) \colon x \in \Omega\},
\end{aligned}$$

und der letzte Satz besagt dann $\operatorname{sing-supp}(\mathcal{A}u) \subset \operatorname{sing-supp} u$. *Das ist auch einleuchtend, denn dort, wo* u *keine Singularität hat, kann* $\mathcal{A}$ *auch keine erzeugen (denn schließlich sind die* a_α *glatte Funktionen).*

Beispiel 4.29 (Lösungsoperatoren für hyperbolische Gleichungen). *Sei* $u_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *und sei* $u = u(t,x)$ *mit* $(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}$ *die Lösung zu*

$$u_{tt} - c^2 \triangle u = 0, \qquad u(0,x) = 0, \qquad u_t(0,x) = u_1(x).$$

Hierbei interpretieren wir $c > 0$ *als* Lichtgeschwindigkeit. *Dann haben wir, nach einiger Rechnung,*

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}x\xi} \frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|} \hat{u}_1(\xi)\, đ\xi \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}c} \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \int_{\mathbb{R}^n_y} e^{\mathrm{i}((x-y)\xi + ct|\xi|)} \frac{\chi(\xi)}{|\xi|} u_1(y)\, dy\, đ\xi \\
&\quad - \frac{1}{2\mathrm{i}c} \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \int_{\mathbb{R}^n_y} e^{\mathrm{i}((x-y)\xi - ct|\xi|)} \frac{\chi(\xi)}{|\xi|} u_1(y)\, dy\, đ\xi \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \int_{\mathbb{R}^n_y} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} \frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|} (1 - \chi(\xi)) u_1(y)\, dy\, đ\xi,
\end{aligned}$$

wobei $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)$ *eine Funktion ist mit* $\chi(\xi) = 1$ *für* $|\xi| \geq 2$ *und* $\chi(\xi) = 0$ *für* $|\xi| \leq 1$. *Der einzige Zweck dieser Funktion besteht darin, zu verhindern, daß wir in den ersten beiden Integralen durch* 0 *dividieren, wenn* $\xi = 0$ *wird.*

Wir konzentrieren uns auf die ersten beiden Integrale und ignorieren das dritte: Dann ist

$$\begin{aligned}
&\Phi(x, y, \xi) = (x - y)\xi \pm ct|\xi|, \\
&a(x, y, \xi) = \frac{\chi(\xi)}{|\xi|} \in S^{-1}_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \\
&\operatorname{grad}_\xi \Phi(x, y, \xi) = (x - y) \pm ct\frac{\xi}{|\xi|}, \\
&S_\Phi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : |x - y| = c|t|\}.
\end{aligned}$$

Nun ist aber $|x - y|$ *gerade gleich der Länge des direkten Wegs zwischen* x *und* y, *und* $c|t|$ *bezeichnet den Weg, den man bei Geschwindigkeit* c *in einem Zeitintervall der Länge* $|t|$ *zurücklegt.*

Die Relation $\text{sing-supp}(\mathcal{A}u_1) \subset S_\Phi \circ \text{sing-supp}(u_1)$ *bedeutet mit diesem* S_Φ *dann, daß Singularitäten der Anfangsfunktion* u_1 *sich gerade mit Geschwindigkeit* c *ausbreiten, wie man es auch erwarten sollte bei einer Gleichung, die die Wellenausbreitung beschreiben will.*

4.4 Wellenfrontmengen und Lagrange–Mannigfaltigkeiten

Die Referenzen für diesen Abschnitt sind [16] und [2].

Aus den Hausaufgaben ist bekannt, daß $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist, falls $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Für solche u gilt weiterhin, daß u glatt (C^∞) genau dann ist, wenn $\hat{u}$ schnell abklingt, siehe Satz 3.26.

Nun ist es aber denkbar, daß $\hat{u}(\xi)$ in manchen Richtungen schnell abklingt, in anderen Richtungen aber nicht. Das Ziel soll jetzt darin bestehen, diese anderen Richtungen besser zu verwalten.

Definition 4.30. *Sei* $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. *Dann sagen wir, daß* $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ *zu* $\Gamma(u)$ *gehört, wenn es* keine *konische Umgebung von* η *gibt, in der für jedes* $k \in \mathbb{N}_+$ *und jedes* ξ *gilt:*

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C_k \langle\xi\rangle^{-k}.$$

Unsere Interpretation ist, daß $\text{sing-supp}\, u$ die Lage der Singularitäten von u beschreibt, und $\Gamma(u)$ beschreibt die Richtungen, entlang derer u singulär ist.

Offensichtlich ist $\Gamma(u)$ eine konische Menge.

Beispiel 4.31. *Sei* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\hat{\varphi}(\xi) \geq 0$ *für alle* ξ, *und sei* $\hat{\varphi}(\xi) = 1$. *Wir wählen* $\eta \neq 0$ *und definieren*

$$u(x) = \sum_{k=1}^\infty k^{-2}\varphi(kx)\exp(\mathrm{i}k^2 x \cdot \eta), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann besteht $\Gamma(u)$ *genau aus einem Strahl.*

Lemma 4.32. *Für* $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ *und* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *ist* $\Gamma(\varphi u) \subset \Gamma(u)$.

Beweis. Siehe [16], Lemma 0.4.1. □

Definition 4.33. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *Für* $x \in \Omega$ *setzen wir*

$$\Gamma_x(u) := \bigcap_\varphi \Gamma(\varphi u),$$

wobei der Durchschnitt über alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *gebildet wird, für die* $\varphi(x) \neq 0$ *ist.*

Definition 4.34 (Wellenfrontmenge). *Für* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *definieren wir die* Wellenfrontmenge *von* u *als*

$$WF(u) := \{(x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0) : \xi \in \Gamma_x(u)\}.$$

Dies ist eine konische Teilmenge von $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$. Die Projektion von $WF(u)$ auf Ω ergibt $\operatorname{sing-supp} u$.

Satz 4.35. *Wenn $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, dann ist die Projektion von $WF(u)$ auf den $\mathbb{R}^n_\xi$ gleich $\Gamma(u)$.*

Beweis. Siehe Proposition 0.4.3 in [16]. □

Also enthält $WF(u)$ sowohl die Informationen von $\operatorname{sing-supp} u$ als auch die Informationen von $\Gamma(u)$.
Sei nun $\psi\colon \Omega_x \to \Omega_y$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, und sei $\Lambda \subset \Omega_y \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$. Dann definieren wir den Pullback von Λ als

$$\psi^*\Lambda := \left\{(x, \xi)\colon (\psi(x), (\psi'(x))^{-\top}\xi) \in \Lambda\right\}.$$

Hierbei ist ψ' die Jacobi–Matrix und $A^{-\top} := (A^{-1})^\top$. In Erinnerung an (2.6) legen wir erneut den Pullback einer Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega_y)$ fest als

$$\langle \psi^* u, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_x)\times\mathcal{D}(\Omega_x)} := \langle u, \Phi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_y)\times\mathcal{D}(\Omega_y)}, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_x),$$

wobei $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega_y)$ sich ergibt als

$$\Phi(y) := \varphi(\psi^{-1}(y)) \left|\det\left(\frac{\partial\psi^{-1}}{\partial y}\right)(y)\right|.$$

Satz 4.36. *Sei $\psi\colon \Omega_x \to \Omega_y$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$WF(\psi^* u) = \psi^* WF(u)$$

für alle $u \in \mathcal{D}'(\Omega_y)$.

Beweis. Siehe Theorem 0.4.6 in [16]. □

Jetzt betrachten wir eine n–dimensionale reelle Mannigfaltigkeit Ω mit Kartenabbildungen

$$\mu\colon \Omega_\mu \to \tilde{\Omega}_\mu \subset \mathbb{R}^n,$$
$$\nu\colon \Omega_\nu \to \tilde{\Omega}_\nu \subset \mathbb{R}^n$$

und einer Kartenwechselabbildung

$$\psi = \nu \circ \mu^{-1}\colon \mu(\Omega_\mu \cap \Omega_\nu) \to \nu(\Omega_\mu \cap \Omega_\nu).$$

Bekanntlich ist t ein Tangentialvektor an Ω im Punkt $x \in \Omega_\mu$, wenn t ein stetiger Operator von $C_0^\infty(\Omega)$ nach $\mathbb{R}$ ist, für den reelle Zahlen $t_1^\mu, \dots, t_n^\mu$ existieren, sodaß

$$t(u \circ \mu) = \sum_{j=1}^n t_j^\mu \partial_{y_j} u(y)\big|_{y=\mu(x)}, \qquad u \in C_0^\infty(\tilde{\Omega}_\mu).$$

Der Raum aller solchen t heißt $T_x\Omega$.
Die Vektoren t^μ und t^ν rechnen sich beim Kartenwechsel ineinander um gemäß

$$t^\nu = \psi'(y) t^\mu, \qquad y = \mu(x) \in \mu(\Omega_\mu \cap \Omega_\nu).$$

Das Tangentialbündel $T\Omega := \cup_{x\in\Omega} T_x\Omega$ (im Sinne einer disjunkten Vereinigung) wird dann kartiert durch die Abbildungen $(x, t) \mapsto (\mu(x), t^\mu)$, wenn $x \in \Omega_\mu$.
Das Bündel der Dualräume heißt Kotangentialbündel $T^*\Omega := \cup_{x\in\Omega} T_x^*\Omega$ (ebenfalls im Sinne einer disjunkten Vereinigung) mit Kartenabbildungen $(x, \xi) \mapsto (\mu(x), \xi^\mu)$, wenn $x \in \Omega_\mu$, wobei ξ^μ bestimmt wird gemäß

$$\langle t, \xi\rangle_{T_x\Omega\times T_x^*\Omega} = \langle t^\mu, \xi^\mu\rangle_{\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n)^*}.$$

Dann gilt bei einem Kartenwechsel

$$\xi^\nu = (\psi'(y))^{-\top}\xi^\mu, \qquad y = \mu(x).$$

Das ist genau dieselbe Umrechnung wie beim Pullback von Wellenfrontmengen, sodaß leicht zu zeigen ist, daß $WF(u)$ eine wohldefinierte Teilmenge von $T^*\Omega \setminus 0$ ist, wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist und $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Sei nun Ω wieder eine Mannigfaltigkeit und $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, dann ist $\mu^* WF(u \circ \mu^{-1}) \subset T^*\Omega \setminus 0$ unabhängig von μ, womit die Wellenfrontmengen für Distributionen auf Mannigfaltigkeiten definiert sind.

Nun wollen wir diese Begriffe auf Fourier–Integral–Operatoren anwenden. Seien $\Omega_x \subset \mathbb{R}^{n_x}$, $\Omega_y \subset \mathbb{R}^{n_y}$, und sei Φ eine Phasenfunktion auf $\Omega_x \times \Omega_y \times (\mathbb{R}^N \setminus 0)$, sowie $a = a(x, y, \theta)$ eine Amplitudenfunktion. Dann haben wir einen FIO $\mathcal{A}$ und einen dazugehörigen Schwartz-Kern A mit

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}u, v\rangle &= \overset{\mathrm{Os}}{\iiint\limits_{\Omega_x \times \Omega_y \times \mathbb{R}^N}} e^{\mathrm{i}\Phi(x,y,\theta)} a(x, y, \theta) u(y) v(x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}\theta \\ &= \langle A, u \otimes v\rangle\,. \end{aligned}$$

Satz 4.37. *Es ist $A \in \mathcal{D}'(\Omega_x \times \Omega_y)$ mit*

$$WF(A) \subset \big\{(x, y, \operatorname{grad}_{x,y} \Phi(x, y, \theta)) \colon \operatorname{grad}_\theta \Phi(x, y, \theta) = 0\big\}\,.$$

Beweis. Siehe [16], Theorem 0.5.1. □

Beispiel: Für ΨDO haben wir $\Phi(x, y, \xi) = (x - y)\xi$, und es folgt

$$WF(A) \subset \{(x, x, \xi, -\xi) \colon x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0\}\,.$$

Beispiel: Für den Lösungsoperator zur Wellengleichung haben wir z.B. $\Phi(x, y, \xi) = (x - y)\xi + ct|\xi|$, und $\operatorname{grad}_\xi \Phi(x, y, \xi) = 0$ bedeutet $y = x + ct\frac{\xi}{|\xi|}$, und somit ist

$$WF(A) \subset \left\{\left(x, x + ct\frac{\xi}{|\xi|}, \xi, -\xi\right) : x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0\right\}.$$

Die jeweils rechts genannten Mengen sollen uns noch etwas beschäftigen. Vorher fassen wir x und y zu z zusammen, also $z = (x, y)$.

Definition 4.38 (Nicht-entartete Phasenfunktion). *Eine Phasenfunktion $\Phi = \Phi(z, \theta)$ auf $\Omega_z \times (\mathbb{R}^N \setminus 0)$ mit $\Omega_z \subset \mathbb{R}^m$ heißt* nicht-entartet*, wenn die Differentiale*

$$\operatorname{grad}_{z,\theta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_j}\right), \qquad j = 1, \ldots, N,$$

N linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^{m+N}$ bilden.

Beispiel: Sei $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$ und $z = (x, y) \in \mathbb{R}^4$ mit $\Phi(x, y, \xi) = (x_1 - y_1)\xi_1 + (x_2 - y_2)\xi_2$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_{x,y,\xi} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_1} &= (1, 0, -1, 0, 0, 0), \\ \operatorname{grad}_{x,y,\xi} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_2} &= (0, 1, 0, -1, 0, 0). \end{aligned}$$

Wir können direkt den Satz über implizite Funktionen anwenden und erhalten, daß

$$C_\Phi = \{(z, \theta) \colon \operatorname{grad}_\theta \Phi(z, \theta) = 0\}$$

eine m–dimensionale glatte (im Sinne von C^∞) Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{m+N}$ ist.

Lemma 4.39. *Falls Φ eine nicht-entartete Phasenfunktion ist, dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} &\kappa \colon C_\Phi \to T^*\Omega_z \setminus 0, \\ &\kappa \colon (z, \theta) \mapsto (z, \operatorname{grad}_z \Phi(z, \theta)) \end{aligned}$$

ein Diffeomorphismus. Dann ist die Menge

$$\Lambda_\Phi := \{(z, \operatorname{grad}_z \Phi(z, \theta)) \colon \operatorname{grad}_\theta \Phi(z, \theta) = 0\}$$

eine glatte m–dimensionale Untermannigfaltigkeit der $2m$–dimensionalen Mannigfaltigkeit $T^*\Omega_z \setminus 0$.

Beweis. Wir wählen $(z,\theta) \in C_\Phi$ und betrachten einen Tangentialvektor $(\delta z, \delta\theta) \in T_{(z,\theta)}C_\Phi$. Weil C_Φ gegeben wird durch das Gleichungssystem $\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = 0$, haben wir

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)\delta z + \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)\delta\theta = 0.$$

Wir betrachten nun das Differential der Abbildung κ am Punkt (z,θ), ausgewertet in Richtung $(\delta z, \delta\theta)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\kappa(\delta z, \delta\theta) &= \left(\frac{\partial z}{\partial z}\delta z + 0\cdot\delta\theta, \left(\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{grad}_z\Phi\right)\delta z + \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{grad}_z\Phi\right)\delta\theta\right) \\
&= \left(\delta z, \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\delta z + \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)\delta\theta\right).
\end{aligned}$$

Um zu zeigen, daß $\mathrm{d}\kappa$ ein Isomorphismus ist, reicht es nachzuweisen, daß $\mathrm{d}\kappa$ injektiv ist. Sei nun also $\mathrm{d}\kappa(\delta z, \delta\theta) = (0,0)$. Dann ist $\delta z = 0$, und wir haben demnach

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)\delta\theta = 0, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)\delta\theta = 0.$$

Aber nach Voraussetzung ist Φ nicht-entartet, und demnach hat die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \end{pmatrix}$$

vollen Rang, was $\delta\theta = 0$ mit sich bringt. □

Es gilt noch mehr; dafür müssen wir aber etwas ausholen. Die Punkte auf dem Kotangentialbündel $T^*\Omega_z \setminus 0$ bezeichnen wir[3] mit (z,ζ). Wenn α eine Differentialform ist auf der Mannigfaltigkeit $T^*\Omega_z \setminus 0$, dann bezeichnen wir mit $\alpha_{(z,\zeta)}$ die Auswertung von α an einem ganz konkreten Punkt $(z,\zeta) \in T^*\Omega_z \setminus 0$. Analog für andere Mannigfaltigkeiten.

Wir haben eine kanonische Projektion $\pi\colon T^*\Omega_z \to \Omega_z$, die (z,ζ) auf den Basispunkt z abbildet. Die Ableitung π' davon ist dann eine lineare Abbildung (nach Auswertung am Punkt (z,ζ)):

$$(\pi')_{(z,\zeta)}\colon T_{(z,\zeta)}(T^*\Omega_z) \to T_z\Omega_z.$$

Für einen Punkt $(z,\zeta) \in T^*\Omega_z$ ist weiterhin ζ eine lineare Abbildung von $T_z\Omega_z$ nach $\mathbb{R}$.

Wir kombinieren dies:

Definition 4.40 (Kanonische 1–Form). *Auf der Mannigfaltigkeit $T^*\Omega_z$ definieren wir eine 1–Form ω gemäß*

$$\omega_{(z,\zeta)} = \zeta \circ (\pi')_{(z,\zeta)}, \qquad \forall (z,\zeta) \in T^*\Omega_z.$$

Diese Form nennen wir kanonische 1–Form.

In der Literatur ist dafür die Schreibweise $\omega = \xi\,\mathrm{d}x$ gebräuchlich, in lokalen Koordinaten dann $\omega = \sum_{j=1}^m \xi_j\,\mathrm{d}x_j$.

Definition 4.41 (Kanonische 2–Form). *Auf der Mannigfaltigkeit $T^*\Omega_z$ definieren wir eine 2–Form σ als*

$$\sigma = \mathrm{d}\omega.$$

Diese Form nennen wir kanonische 2–Form.

In lokalen Koordinaten schreibt man dann oft $\sigma = \sum_{j=1}^m \mathrm{d}\xi_j \wedge \mathrm{d}x_j$.

Seien nun (t,τ) und (t',τ') zwei Tangentenvektoren an $T^*\Omega_z$ im Punkt (z,ζ). Dann ist

$$\sigma\left((t,\tau),(t',\tau')\right) = \langle t',\tau\rangle - \langle t,\tau'\rangle,$$

und zur Form σ gehört also die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix},$$

und wir erkennen, daß σ eine nicht-entartete bilineare Form ist.

[3] in der Literatur ist die Bezeichnung (x,ξ) gebräuchlich

Definition 4.42 (Symplektische Formen, Räume, Mannigfaltigkeiten). *Eine antisymmetrische nicht-entartete bilineare Form auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum E heißt* symplektische Form. *Ein Paar (E, σ) aus einem endlich-dimensionalen Raum E und einer symplektischen Form σ auf E heißt* symplektischer Raum.

Eine 2–Form σ auf einer Mannigfaltigkeit M heißt symplektische Form auf einer Mannigfaltigkeit M, *wenn $\mathrm{d}\sigma = 0$ und wenn für jeden Punkt $m \in M$ die Auswertung σ_m eine symplektische Form auf $T_m M$ ergibt. Das Paar (M, σ) nennt man dann* symplektische Mannigfaltigkeit.

Bemerkung 4.43. *Aus den obigen Darlegungen folgt: sei Ω eine Mannigfaltigkeit. Dann ist $T^*\Omega$, ausgestattet mit der kanonischen 2–Form σ, eine symplektische Mannigfaltigkeit, denn wegen $\sigma = \mathrm{d}\omega$ ist $\mathrm{d}\sigma = 0$.*

Sei W ein Unterraum von $T_{(z,\zeta)}(T^*\Omega_z \setminus 0)$, und wir setzen

$$W^\sigma := \left\{ v \in T_{(z,\zeta)}(T^*\Omega_z \setminus 0) \colon \sigma(w, v) = 0, \quad \forall w \in W \right\}.$$

Weil σ nicht-entartet ist, gilt $W = W^\sigma$ höchstens für $\dim W = m$.

Definition 4.44 (Lagrange–Mannigfaltigkeit). *Eine glatte Untermannigfaltigkeit Λ des $T^*\Omega_z \setminus 0$ heißt* Lagrange–Mannigfaltigkeit, *wenn für jedes $(z, \zeta) \in \Lambda$ gilt: $W = W^\sigma$, wobei $W := T_{(z,\zeta)}\Lambda$.*

Nun kommt endlich das zentrale Ergebnis dieses Abschnitts:

Satz 4.45. *Sei $\Phi = \Phi(z, \theta)$ eine nicht-entartete Phasenfunktion. Dann ist Λ_Φ eine Lagrange–Mannigfaltigkeit im $T^*\Omega_z \setminus 0$.*

Beweis. Wenn wir $\omega = 0$ auf Λ_Φ gezeigt hätten, wären wir fertig. Wir haben bereits einen Diffeomorphismus $\kappa \colon C_\Phi \to \Lambda_\Phi$ zwischen Mannigfaltigkeiten der Dimension m. Der Pullback von ω unter κ ist nun aber gleich

$$\operatorname{grad}_z \Phi \cdot \mathrm{d}z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \mathrm{d}z = \mathrm{d}\Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \cdot \mathrm{d}\theta.$$

Die Funktion Φ ist homogen vom Grad 1 in θ, also erfüllt sie die Euler–Differentialgleichung

$$\Phi = \theta \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}.$$

Per Definition ist $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \equiv 0$ auf C_Φ, also auch $\Phi \equiv 0$ auf C_Φ. ☐

Kapitel 5

Symbolkalkül

Wir haben einen ΨDO $\mathcal{A}$ mit Amplitudenfunktion $a \in S^m$,

$$(\mathcal{A}u)(x) = \overset{\mathrm{Os}}{\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}_{y\times\xi}}} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} a(x,y,\xi)u(y)\,\mathrm{d}y\,\text{đ}\xi, \qquad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{5.1}$$

Gemäß Satz 4.25 ist dann $\mathcal{A}$ ein stetiger Operator von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, und forsetzbar zu einem stetigen Operator von $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Wir stellen uns einige Fragen:

- kann man in der Amplitudenfunktion das y „wegschaffen“ ? Dann könnte man die Integration über y ausführen und bekäme die etwas einfachere Darstellung

$$(\mathcal{A}u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}x\xi} p(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,\text{đ}\xi, \qquad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

  wenn es denn eine solche Funktion p gäbe. Dieses Integral existiert im herkömmlichen Sinne. Schön wäre eine Formel, wie man p aus a gewinnen kann. Diese Funktion p heißt dann *Symbol von* $\mathcal{A}$, und man schreibt $p = \sigma_{\mathcal{A}}$ oder auch $p = \sigma(\mathcal{A})$.

- Wie sieht ein transponierter Operator $\mathcal{A}^t$ aus, und wie kann man sein Symbol $\sigma_{\mathcal{A}^t}$ bestimmen ?

- Sei $\mathcal{B}$ ein weiterer ΨDO. Was kann man über $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ aussagen (schon die Existenz ist nicht klar, im Hinblick auf obige Abbildungseigenschaften) ?

- Unter welchen Voraussetzungen gibt es einen inversen Operator $\mathcal{A}^{-1}$, und wie sieht er aus ? Wenn man keinen inversen Operator findet oder wenn es keinen gibt, findet man dann vielleicht wenigstens so etwas Ähnliches, als „Trostpreis“ ?

Im Folgenden werden wir jeweils die Symbole der gewünschten Operatoren bestimmen, wobei wir uns damit begnügen (müssen), diese Symbole modulo $S^{-\infty}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ zu ermitteln.

Zur Vereinfachung der Notation noch eine Definition:

Definition 5.1. *Sei $a = a(x,y,\xi) \in S^m_{\varrho,\delta}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ eine Amplitudenfunktion. Dann sagen wir, daß der dazugehörige Operator $\mathcal{A}$ zur Klasse $\Psi^m_{\varrho,\delta}(\Omega)$ gehört. Im Falle von $(\varrho,\delta) = (1,0)$ schreiben wir einfach Ψ^m anstatt $\Psi^m_{1,0}$. Wir setzen $\Psi^{-\infty} = \bigcap_{m\in\mathbb{R}} \Psi^m_{\varrho,\delta}$, wobei der Durchschnitt nicht von $\varrho, \delta \in [0,1]$ abhängt. Gelegentlich verwenden wir auch die Schreibweise $\Psi^\infty = \bigcup_{m\in\mathbb{R}} \Psi^m_{\varrho,\delta}$.*

5.1 Die Methode der stationären Phase

Wir betrachten ein Integral der Art

$$I(\lambda) = \int_{x\in U} e^{\mathrm{i}\lambda\varphi(x)} a(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 1.$$

Satz 5.2. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und seien $a \in C_0^\infty(U)$, $\varphi \in C^\infty(U)$, wobei φ als reellwertig angenommen wird. Falls U unbeschränkt sein sollte, dann setzen wir voraus*

$$|\partial_x^\alpha a(x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{-n-1}, \qquad \forall x \in U,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Wenn es nun ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $|\nabla\varphi(x)| \geq \varepsilon$ für alle $x \in U$, dann ist $I(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{-N})$ für $\lambda \to +\infty$ und jedes $N \in \mathbb{N}$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Wenn also im Integrationsgebiet die Phasenfunktion φ keine stationären Punkte hat, dann ist das Integral $I(\lambda)$ schnell abklingend. Als nächstes schauen wir uns den Fall eines einzelnen stationären Punktes an:

Satz 5.3. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische reguläre Matrix, und sei $s \in \mathbb{R}$ mit $s > n/2$. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ (nur von s, n und A abhängig) sodaß für alle $k \in \mathbb{N}_+$ und alle $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt:*

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n_x} \exp(\mathrm{i}\lambda \langle Ax, x\rangle/2) u(x)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\operatorname{sign}(A)\right) |\det A|^{-1/2} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\mathrm{i}^j}{j!(2\lambda)^j} \left(\left\langle A^{-1}\nabla, \nabla\right\rangle^j u\right)(0) + R_k(\lambda), \\
&|R_k(\lambda)| \leq c\frac{\lambda^{-n/2}}{k!(2\lambda)^k} \sum_{|\alpha|\leq s} \left\| \left\langle A^{-1}\nabla, \nabla\right\rangle^k \partial^\alpha u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Hierbei ist $\operatorname{sign}(A)$ die Signatur von A, also die Anzahl positiver Eigenwerte minus die Anzahl negativer Eigenwerte.

Beweis. Die Funktion $x \mapsto \exp(\mathrm{i}\lambda\langle Ax, x\rangle/2)$ hat als Fouriertransformierte

$$\xi \mapsto \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\operatorname{sign}(A)\right) |\det A|^{-1/2} \exp(-\mathrm{i}\left\langle A^{-1}\xi, \xi\right\rangle/(2\lambda)),$$

wie man durch Diagonalisierung von A zügig ausrechnen kann. Mit (2.2) haben wir dann

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n_x} \exp(\mathrm{i}\lambda \langle Ax, x\rangle/2) u(x)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\operatorname{sign}(A)\right) |\det A|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \exp(-\mathrm{i}\left\langle A^{-1}\xi, \xi\right\rangle/(2\lambda)) (\mathcal{F}^{-1}u)(\xi)\,\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Per Taylorentwicklung haben wir

$$\begin{aligned}
&\exp(-\mathrm{i}\left\langle A^{-1}\xi, \xi\right\rangle/(2\lambda)) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!\lambda^j} \left(-\mathrm{i}\frac{\left\langle A^{-1}\xi, \xi\right\rangle}{2}\right)^j + \lambda^{-k}\varrho_k(\xi, \lambda), \\
&|\varrho_k(\xi, \lambda)| \leq \frac{1}{k!} \left|\left\langle A^{-1}\xi, \xi\right\rangle/2\right|^k.
\end{aligned}$$

Nun beachte man, daß

$$\int_{\mathbb{R}^n_\xi} \left(-\mathrm{i}\frac{\left\langle A^{-1}\xi, \xi\right\rangle}{2}\right)^j (\mathcal{F}^{-1}u)(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^j \left(\left\langle A^{-1}\nabla, \nabla\right\rangle^j u\right)(0).$$

Für die Abschätzung von

$$\tilde{R}_k(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \varrho_k(\xi, \lambda) (\mathcal{F}^{-1}u)(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

benutzen wir die $(\mathcal{F}^{-1}u)(\xi) = (2\pi)^{-n}\hat{u}(-\xi)$ sowie die Ungleichung von Cauchy–Schwarz:

$$
\begin{aligned}
|\tilde{R}_k(\lambda)| &\leq \frac{1}{k!}\int_{\mathbb{R}^n_\xi} \left|\left\langle A^{-1}\xi,\xi\right\rangle/2\right|^k \left|\mathcal{F}^{-1}(u)(\xi)\right| \,\mathrm{d}\xi \\
&\leq \frac{1}{k!2^k}\int_{\mathbb{R}^n_\xi} \left|\left\langle A^{-1}\xi,\xi\right\rangle\right|^k \langle\xi\rangle^s \left|\hat{u}(\xi)\right| \cdot \langle\xi\rangle^{-s} \,\mathrm{d}\xi \\
&\leq \frac{c(s,n)}{k!2^k}\left(\int_{\mathbb{R}^n_\xi} \left|\left\langle A^{-1}\xi,\xi\right\rangle\right|^{2k} \langle\xi\rangle^{2s} \left|\hat{u}(\xi)\right|^2 \,\mathrm{d}\xi\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Die Abschätzung von R_k folgt dann schnell. □

Dies werden wir demnächst anwenden. Sei $a \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_\xi)$ mit $m \in \mathbb{R}$, und sei

$$
(\mathcal{A}u)(x) = \overset{\mathrm{Os}}{\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}_{y,\xi}}} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} a(x,y,\xi)u(y)\,\mathrm{d}y\,đ\xi, \qquad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).
$$

Wir könnten auch $S^m_{\varrho,\delta}$ nehmen mit $0 \leq \delta < \varrho \leq 1$, das würde am Prinzip der folgenden Rechnereien nichts wesentliches ändern (bis auf evtl. die Länge). Genauso könnte man überall den $\mathbb{R}^n_x$ durch ein Gebiet $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n$ ersetzen.

Wir suchen ein $p(x,\xi) = \sigma_{\mathcal{A}}(x,\xi)$, sodaß (als iteriertes Integral) gilt:

$$
(\mathcal{A}u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi}\int_{\mathbb{R}^n_y} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} p(x,\xi)u(y)\,\mathrm{d}y\,đ\xi.
$$

Sei $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(s) \equiv 1$ für $|s| \leq \varepsilon$.

Dann können wir schreiben

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}u)(x) = &\overset{\mathrm{Os}}{\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}_{y,\xi}}} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi}\chi(x-y)a(x,y,\xi)u(y)\,\mathrm{d}y\,đ\xi \\
&+ \overset{\mathrm{Os}}{\iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}_{y,\xi}}} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi}(1-\chi(x-y))a(x,y,\xi)u(y)\,\mathrm{d}y\,đ\xi.
\end{aligned}
$$

Wegen Satz 4.20 hat der durch das zweite Integral dargestellte Operator einen glatten Schwartz–Kern und ist demnach ein glättender Operator, also einer, der von $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ abbildet. Solche Operatoren wollen wir im Folgenden nicht weiter beachten.

Also dürfen wir im Folgenden annehmen, daß für die Amplitudenfunktion $a = a(x,y,\xi)$ und für ein positives ε unserer Wahl gilt:

$$
a(x,y,\xi) = 0, \qquad \text{falls } |x-y| > \varepsilon.
$$

Dann gilt auch für die Schwartz–Kern–Distribution $A = A(x,y)$, daß $A(x,y) = 0$ für $|x-y| > \varepsilon$. Solche Operatoren $\mathcal{A}$ nennt man *eigentlich getragen* bzw. *properly supported*. Diese Operatoren sind deshalb interessant, weil der Wert $(\mathcal{A}u)(x)$ nur von solchen Werten $u(y)$ abhängen kann, für die $|x-y| \leq \varepsilon$. Insbesondere werden Funktionen u mit kompaktem Träger wieder auf Funktionen $\mathcal{A}u$ mit kompaktem Träger abgebildet.

Wir haben dann sogar

$$
\mathcal{A}\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \qquad \mathcal{A}\colon \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^n),
$$

mit Stetigkeit in den entsprechenden Topologien. Sei nun $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, sogar eine analytische Funktion, und es ist

$$
u(x) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}x\xi}\hat{u}(\xi)\,đ\xi.
$$

Wir schreiben $e_\xi(x) = e^{\mathrm{i}x\xi}$. Für jedes ξ ist $e_\xi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n_x)$, und diese Funktionenschar hängt stetig (gemessen in der Topologie von $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n_x)$) vom Parameter ξ ab. Und weil nun $\mathcal{A}$ stetig ist als Abbildung von $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n_x)$ in sich, haben wir[1]

$$(\mathcal{A}u)(x) = \left(\mathcal{A}\int_{\mathbb{R}^n_\xi} e_\xi \hat{u}(\xi)\, đ\xi\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} (\mathcal{A}e_\xi)(x) \cdot \hat{u}(\xi)\, đ\xi.$$

Dann ergibt sich

$$(\mathcal{A}u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}x\xi} \left(e_{-\xi}(x)(\mathcal{A}e_\xi)(x)\right) \cdot \hat{u}(\xi)\, đ\xi, \qquad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

und somit setzen wir

$$p(x,\xi) := e^{-\mathrm{i}x\xi}(\mathcal{A}e_\xi)(x), \qquad (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Wegen der Eigenschaften von $\mathcal{A}$ ist dies, für jedes fixierte ξ, eine Funktion aus dem $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n_x)$.

Nach Definition von $\mathcal{A}$ (und weil $\mathcal{A}$ eigentlich getragen ist), ist dann

$$\begin{aligned} p(x,\xi) &= e^{-\mathrm{i}x\xi} \;{}^{\mathrm{Os}}\!\!\iint_{\mathbb{R}^{2n}_{y,\theta}} e^{\mathrm{i}(x-y)\theta} a(x,y,\theta) e^{\mathrm{i}y\xi}\, dy\, đ\theta \\ &= {}^{\mathrm{Os}}\!\!\iint_{\mathbb{R}^{2n}_{y,\theta}} e^{\mathrm{i}(x-y)(\theta-\xi)} a(x,y,\theta)\, dy\, đ\theta \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0} \iint_{\mathbb{R}^{2n}_{y,\theta}} e^{\mathrm{i}(x-y)(\theta-\xi)} \chi(\varepsilon\theta) a(x,y,\theta)\, dy\, đ\theta. \end{aligned}$$

Beachte, daß die Integration bzgl. y sowieso nur über einem beschränkten Gebiet erfolgt.

Wir wollen jetzt die Methode der stationären Phase anwenden, also Satz 5.2 und 5.3. Dort interessieren wir uns für das Verhalten für $\lambda \to \infty$ (wir werden gleich sehen, wer hier λ ist), haben aber außerdem noch ein ε zu verwalten. Es ist nicht so leicht zu beantworten, ob man dann den Grenzprozeß für ε durchführen kann, also schaffen wir zuerst das ε fort. Dazu merken wir an, daß

$$\langle D_y\rangle^{2k} e^{\mathrm{i}(y-x)(\xi-\theta)} = \langle \xi-\theta\rangle^{2k} e^{\mathrm{i}(y-x)(\xi-\theta)}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

wobei $\langle D_y\rangle^2 = (1-\triangle_y)$, und nach partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} p(x,\xi) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{\mathbb{R}^{2n}_{y,\theta}} e^{\mathrm{i}(y-x)(\xi-\theta)} \langle\xi-\theta\rangle^{-2k} \chi(\varepsilon\theta) \langle D_y\rangle^{2k} a(x,y,\theta)\, dy\, đ\theta \\ &= \iint_{\mathbb{R}^{2n}_{y,\theta}} e^{\mathrm{i}(y-x)(\xi-\theta)} \langle\xi-\theta\rangle^{-2k} \langle D_y\rangle^{2k} a(x,y,\theta)\, dy\, đ\theta. \end{aligned}$$

Wenn k groß genug gewählt wurde, dann ist dies ein im herkömmlichen Sinne existierendes Integral, das man nach den Parametern x und ξ ableiten kann. Dann kann man sich Ableitungen $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)$ anschauen und diese abschätzen, und auf diesem Wege kann man zeigen, daß $p \in S^m_{1,0}$ wenn $a \in S^m_{1,0}$. Diese Rechnungen sind elementar, aber nicht besonders kurz (und im Übrigen zum Selbststudium gut geeignet).

Um eine besser handhabbare Formel zu bekommen, wie man p aus a ermitteln kann (modulo $S^{-\infty}$), setzen wir

$$\lambda = |\xi| \gg 1, \quad \omega = \frac{\xi}{|\xi|}, \quad \varrho = \frac{\theta}{|\xi|}, \quad đ\theta = \lambda^n\, đ\varrho,$$

und es ergibt sich

$$p(x,\xi) = \iint_{\mathbb{R}^{2n}_{y,\varrho}} e^{\mathrm{i}(x-y)(\varrho-\omega)\lambda} \langle\lambda(\omega-\varrho)\rangle^{-2k} \langle D_y\rangle^{2k} a(x,y,\lambda\varrho)\lambda^n\, dy\, đ\varrho.$$

[1] Übungsaufgabe: man rechtfertige, daß man im letzten Schritt $\mathcal{A}$ in das Integral hineinziehen darf.

Wir können die Integration beschränken auf eine kleine Umgebung vom gegebenen Punkt (ω, x), denn außerhalb davon ist

$$|\nabla_{\varrho,y}(x-y)(\varrho-\omega)| \geq \text{const.} > 0,$$

und mit Satz 5.2 erkennen wir einen solchen Beitrag als $\mathcal{O}(\lambda^{-N})$ für jedes N, also unwichtig[2]. Also können wir uns jetzt auf den Standpunkt stellen, daß auch die Integration bezüglich ϱ lediglich auf einem Kompaktum stattfindet. Dann machen wir die obige partielle Integration bzgl. der Variablen y wieder rückgängig und haben als noch zu untersuchendes Integral

$$I = \iint_{|(\varrho,y)-(\omega,x)|\leq 1/2} e^{\mathrm{i}(x-y)(\varrho-\omega)\lambda} a(x,y,\lambda\varrho)\lambda^n \, đ\varrho \, dy.$$

Der einzige stationäre Punkt der Phase ist hier $(\varrho, y) = (\omega, x)$. Wir verschieben die Variablen:

$$x - y =: z, \qquad \varrho - \omega =: \sigma,$$

also

$$I = \iint_{|(z,\sigma)|\leq 1/2} e^{\mathrm{i}z\sigma\lambda} a(x, x-z, \lambda(\omega+\sigma))\lambda^n \, d\sigma \, dy (2\pi)^{-n}.$$

Wir wenden Satz 5.3 an. Das dortige x ist hier gleich $(z_1, \ldots, z_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, die Matrix A ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$$

mit $A^{-1} = A$ und $\operatorname{sign}(A) = 0$, also ist mit $\nabla = \nabla_{z,\sigma}$ und $D_z = -\mathrm{i}\nabla_z$

$$\begin{aligned}
I &= \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^n \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\mathrm{i}^j}{j!(2\lambda)^j} \left(\langle A\nabla, \nabla\rangle^j a(x, x-z, \lambda(\omega+\sigma))\right)\Big|_{(z,\sigma)=(0,0)} \cdot \lambda^n (2\pi)^{-n} + R_k(\lambda), \\
&\qquad |R_k(\lambda)| \leq C_k \lambda^{-n-k} \sum_{|\alpha|\leq s} \left\| \langle A\nabla, \nabla\rangle^k \partial^\alpha_{z,\sigma} a(x, x-z, \lambda(\omega+\sigma))\lambda^n \right\|_{L^2(\{|(z,\sigma)|\leq 1/2\})}, \\
I &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\mathrm{i}^j}{j!\lambda^j} \left(\langle \nabla_z, \nabla_\sigma\rangle^j a(x, x-z, \lambda(\omega+\sigma))\right)\Big|_{(z,\sigma)=(0,0)} + R_k(\lambda), \\
&\qquad |R_k(\lambda)| \leq C_k \lambda^{-k} \sum_{|\alpha|\leq s} \left\| \langle \nabla_z, \nabla_\sigma\rangle^k \partial^\alpha_{z,\sigma} a(x, x-z, \lambda(\omega+\sigma)) \right\|_{L^2(\{|(z,\sigma)|\leq 1/2\})}, \\
I &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!\lambda^j} \left(\langle D_z, \nabla_\sigma\rangle^j a(x, x+z, \lambda(\omega+\sigma))\right)\Big|_{(z,\sigma)=(0,0)} + R_k(\lambda), \\
&\qquad |R_k(\lambda)| \leq C_k \lambda^{-k} \sum_{|\alpha|\leq s} \left\| \langle \nabla_z, \nabla_\sigma\rangle^k \partial^\alpha_{z,\sigma} a(x, x+z, \lambda(\omega+\sigma)) \right\|_{L^2(\{|(z,\sigma)|\leq 1/2\})}, \\
I &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \left(\langle D_z, \nabla_\theta\rangle^j a(x, x+z, \theta)\right)\Big|_{(z,\theta)=(0,\xi)} + R_k(\lambda), \\
&\qquad |R_k(\lambda)| \leq C_k \sum_{|\alpha|\leq s} \left\| \langle \nabla_z, \nabla_\theta\rangle^k \partial^\alpha_{z,\sigma} a(x, x+z, \theta)) \right\|_{L^2(\{|(z,\sigma)|\leq 1/2\})}.
\end{aligned}$$

Wir bekommen damit insgesamt

$$I = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \left(\langle D_y, \nabla_\theta\rangle^j a(x, y, \theta)\right)\Big|_{(y,\theta)=(x,\xi)} + R_k(x,\xi)$$

mit $R_k \in S^{m-k}_{1,0}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$, wobei diese Aussage über den Restterm noch nachzurechnen wäre. Hierbei würde uns Satz 5.12 helfen.

Wir tragen unsere Ergebnisse zusammen:

[2] Übungsaufgabe: man verifiziere die Unwichtigkeit (die Rechnung ist nicht sehr schwer, aber auch nicht sehr kurz).

Satz 5.4. *Sei $a \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_\xi)$ mit $a(x,y,\xi) = 0$ für $|x-y| \geq \varepsilon > 0$, und sei $\mathcal{A}$ der dazugehörige ΨDO. Dann gehört zu diesem Operator ein Symbol $p = \sigma_{\mathcal{A}} \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$ gemäß*

$$p(x,\xi) = e^{-\mathrm{i}x\xi}(\mathcal{A}e_\xi)(x), \qquad (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n},$$

und wir haben die asymptotische Entwicklung

$$p(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \Big(\langle \nabla_\xi, D_y \rangle^j \, a(x,y,\xi) \Big)\Big|_{y=x},$$

womit gemeint ist, daß für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ gilt, daß $p - \sum_{j=0}^{k-1} \dots \in S^{m-k}_{1,0}$. Wir schreiben für diese asymptotische Entwicklung auch

$$p(x,\xi) \sim \exp(\langle \nabla_\xi, D_y \rangle) a(x,y,\xi)\Big|_{y=x}$$

oder

$$p(x,\xi) \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!} \left(\partial^\alpha_\xi D^\alpha_y a(x,y,\xi) \right)\Big|_{y=x}.$$

5.2 Anwendungen

Sei P ein ΨDO mit Symbol $p \in S^m_{1,0}$, wobei $m \in \mathbb{R}$, also

$$(Pu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}x\xi} p(x,\xi) \hat{u}(\xi) \, đ\xi = \mathrm{Os}\iint_{\mathbb{R}^{2n}_{y,\xi}} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} p(x,\xi) u(y) \, \mathrm{d}y \, đ\xi.$$

Wir setzen nicht voraus, daß der Operator P eigentlich getragen ist. Für den transponierten Operator muß gelten $\langle P^t u, v \rangle = \langle u, Pv \rangle$, wenn $u, v \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$, wobei hier $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$. Im Beweis von Satz 4.25 finden wir die Darstellung

$$(P^t u)(x) = \mathrm{Os}\iint_{\mathbb{R}^{2n}_{y,\xi}} e^{-\mathrm{i}(x-y)\xi} p(y,\xi) u(y) \, \mathrm{d}y \, đ\xi.$$

Um das Vorzeichen der Phasenfunktion zu reparieren, substituieren wir $\xi \mapsto -\xi$ und entdecken für den Operator P^t die Amplitudenfunktion

$$a(x,y,\xi) = p(y,-\xi).$$

Also haben wir gezeigt:

Satz 5.5. *Das Symbol σ_{P^t} des transponierten Operators P^t existiert $\mod S^{-\infty}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_\xi)$, gehört auch zu $S^m_{1,0}$, und es hat die Form*

$$\sigma_{P^t}(x,\xi) \sim \Big(\exp(-\langle \nabla_\xi, D_x \rangle) p \Big)(x,-\xi)$$

oder auch

$$\sigma_{P^t}(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha_\xi D^\alpha_x \Big(p(x,-\xi) \Big).$$

Nun seien zwei ΨDO P und Q gegeben, und wir interessieren uns für die Komposition $P \circ Q$. Diese ist normalerweise nicht definierbar, es sei denn, daß eine der beiden Zusatzbedingungen erfüllt ist:

- mindestens einer der beiden Operatoren hat einen Schwartz–Kern, der eigentlich getragen ist (ein scharfer Blick auf den Schwartz–Kern zeigt uns, daß dann auch der dazugehörige transponierte Operator eigentlich getragen ist),

- wir arbeiten im $\mathbb{R}^n$ (und nicht etwa in einem beschränkten Gebiet Ω), und beide Operatoren haben globale Symbolabschätzungen. Gemäß Hausaufgabe bildet dann nämlich jeder Operator von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ab.

Die erste Zusatzbedingung läßt sich auch auf beschränkte Gebiete Ω anstatt des $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern.

Die beiden Operatoren P und Q sollen Symbole p und q haben. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß Q eigentlich getragen ist (die anderen Fälle sind schöne Übungsaufgaben). Dann ist für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auch $Qu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, also

$$(P \circ Qu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}x\xi} p(x,\xi)(Qu)\hat{}(\xi)\, đ\xi,$$

und es stellt sich die Frage, wie man $(Qu)\hat{}(\xi)$ mit wenig Aufwand auf verständliche Weise bestimmt. Dazu verfahren wir wie folgt: Es ist, wegen (2.2),

$$\langle (Qu)\hat{}, v\rangle = \langle Qu, \hat{v}\rangle = \left\langle u, Q^t \hat{v}\right\rangle,$$

und demnach

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n_\xi} (Qu)\hat{}(\xi) v(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{R}^n_x} u(x)(Q^t\hat{v})(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_x} u(x)\left(\int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}x\xi}\sigma_{Q^t}(x,\xi)\hat{\hat{v}}(\xi)\, đ\xi\right)\mathrm{d}x && \Big|\ \hat{\hat{f}}(\xi) = (2\pi)^n f(-\xi) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_x} u(x)\left(\int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}x\xi}\sigma_{Q^t}(x,\xi)v(-\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}x && \Big|\ \xi \to -\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_x} u(x)\int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{-\mathrm{i}x\xi}\sigma_{Q^t}(x,-\xi)v(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^n_x} e^{-\mathrm{i}x\xi}\sigma_{Q^t}(x,-\xi)u(x)\,\mathrm{d}x\right)v(\xi)\,\mathrm{d}\xi,
\end{aligned}$$

und nach Umbenennung $x \to y$ haben wir also (für eigentlich getragenes Q)

$$(Qu)\hat{}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n_y} e^{-\mathrm{i}y\xi}\sigma_{Q^t}(y,-\xi)u(y)\,\mathrm{d}y.$$

Damit ist nun, wenn wir $q^t := \sigma_{Q^t}$ setzen,

$$\begin{aligned}
(P \circ Qu)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}x\xi}p(x,\xi)(Qu)\hat{}(\xi)\, đ\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_\xi}\int_{\mathbb{R}^n_y} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi}p(x,\xi)q^t(y,-\xi)u(y)\,\mathrm{d}y\, đ\xi,
\end{aligned}$$

also lautet die Amplitudenfunktion dazu $a(x,y,\xi) = p(x,\xi)q^t(y,-\xi)$, und das Symbol zu $P \circ Q$ ist dann

$$\begin{aligned}
(\sigma_{P\circ Q})(x,\xi) &\sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x,y,\xi)\Big|_{y=x} \\
&= \exp\left(\langle\nabla_\xi, D_y\rangle\right)a(x,y,\xi)\Big|_{y=x} = \exp\left(\langle\nabla_\xi, D_y\rangle\right)\left(p(x,\xi)q^t(y,-\xi)\right)\Big|_{y=x} \\
&= \exp\left(\langle\nabla_\xi + \nabla_\eta, D_y\rangle\right)\left(p(x,\xi)q^t(y,-\eta)\right)\Big|_{y=x,\eta=\xi} \\
&= \exp\left(\langle\nabla_\xi + \nabla_\eta, D_y\rangle\right)\Big(p(x,\xi)\Big(\exp(-\langle\nabla_\eta, D_y\rangle)q\Big)(y,\eta)\Big)\Big|_{y=x,\eta=\xi} \\
&= \exp\left(\langle\nabla_\xi + \nabla_\eta, D_y\rangle\right)\exp(-\langle\nabla_\eta, D_y\rangle)\Big(p(x,\xi)q(y,\eta)\Big)\Big|_{y=x,\eta=\xi} \\
&= \exp\left(\langle\nabla_\xi, D_y\rangle\right)\Big(p(x,\xi)q(y,\eta)\Big)\Big|_{y=x,\eta=\xi} \\
&= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{1}{\alpha!}\left(\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)\right)\left(D_x^\alpha q(x,\xi)\right).
\end{aligned}$$

Das rechnet man schnell nach für den Spezialfall, daß P und Q Differentialoperatoren sind, denn dann sind p und q Polynome in ξ, und die Reihe hat nur endlich viele Summanden.

Wir haben gezeigt:

Satz 5.6. *Seien P und Q Operatoren aus den Klassen $\Psi^{m_p}_{1,0}(\mathbb{R}^n)$ und $\Psi^{m_q}_{1,0}(\mathbb{R}^n)$, und beide seien eigentlich getragen. Dann existiert die Komposition $P \circ Q$, gehört zu $\Psi^{m_p+m_q}_{1,0}(\mathbb{R}^n)$, und für das Symbol gilt die asymptotische Entwicklung*

$$\sigma_{P\circ Q}(x,\xi) \sim \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!} \left(\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)\right) \left(D_x^\alpha q(x,\xi)\right).$$

Schließlich schauen wir uns noch den $L^2(\mathbb{R}^n)$–adjungierten Operator A^* an, für den definitionsgemäß gilt

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle_{L^2} = \langle u, \mathcal{A}^* v\rangle_{L^2},$$

im Sinne von

$$\int_{\mathbb{R}^n_x} (\mathcal{A}u)(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\overline{(\mathcal{A}^*v)(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad \forall u,v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Wenn nun $\mathcal{A}$ wie üblich durch (5.1) gegeben ist, wobei wir jetzt der Einfachheit halber $a \in S^m_{1,0}$ mit $m < -n$ annehmen, dann können wir alle Integrale ohne komplizierte Begründung tauschen, und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}u, v\rangle_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^n_x}\int_{\mathbb{R}^n_\xi}\int_{\mathbb{R}^n_y} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} a(x,y,\xi) u(y)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}y\,\text{đ}\xi\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_y} u(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n_\xi}\int_{\mathbb{R}^n_x} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} a(x,y,\xi)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x\,\text{đ}\xi\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_y} u(y)\overline{\left(\int_{\mathbb{R}^n_\xi}\int_{\mathbb{R}^n_x} e^{\mathrm{i}(y-x)\xi} \overline{a(x,y,\xi)} v(x)\,\mathrm{d}x\,\text{đ}\xi\right)}\mathrm{d}y, \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_y} u(y)\overline{(\mathcal{A}^*v)(y)}\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

und demnach ist

$$(\mathcal{A}^*v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi}\int_{\mathbb{R}^n_y} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi}\overline{a(y,x,\xi)} v(y)\,\mathrm{d}y\,\text{đ}\xi.$$

Wir haben also gezeigt: wenn zum Operator $\mathcal{A}$ die Amplitudenfunktion $(x,y,\xi) \mapsto a(x,y,\xi)$ gehört, dann gehört zum adjungierten Operator $\mathcal{A}^*$ die Amplitudenfunktion $(x,y,\xi) \mapsto \overline{a(y,x,\xi)}$.

In Bezug auf die pseudodifferentiellen Symbole bedeutet dies: wenn zum Operator $\mathcal{A}$ das Symbol $p(x,\xi)$ gehört, dann gehört zum adjungierten Operator $\mathcal{A}^*$ das Symbol

$$\sigma_{\mathcal{A}^*}(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{p(x,\xi)}.$$

Wir schauen uns noch die „Bedeutung“ der Variablen x und y in der Amplitude $a = a(x,y,\xi)$ an. Sei z.B. $a = a(x,y,\xi) = a_1(x)a_2(y)\xi^\alpha$, dann ist

$$(\mathcal{A}u)(x) = a_1(x) D_x^\alpha \left(a_2(x)u(x)\right),$$

und wir erkennen drei Operationen (zwei Multiplikationen mit Koeffizienten und eine Ableitung), die in einer bestimmten Reihenfolge ausgeführt werden.

Unser Wunsch, ein Symbol $p(x,\xi)$ aus einer Amplitude $a(x,y,\xi)$ zu gewinnen, ist rein aus der Tradition geboren. Wir hätten auch ein Symbol $p(y,\xi)$ suchen können. Aus naheliegenden Gründen nennt man $p(x,\xi)$ das *Linkssymbol* von $\mathcal{A}$, und $p(y,\xi)$ heißt das *Rechtssymbol* von $\mathcal{A}$.

Ein in der Physik beliebter „Kompromiß" ist das Weyl-Symbol

$$p^w = p^w\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right),$$

das den zentralen Vorteil hat, daß man sofort erkennen kann, ob ein Operator $\mathcal{A}$ selbst-adjungiert ist: genau dann ist nämlich sein Weyl–Symbol reell–wertig.

5.3 Eigentlich getragene Operatoren, asymptotische Entwicklungen, Algebren

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ΨDOn auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Laut Satz 4.25 bilden beide Operatoren von $\mathcal{D}(\Omega)$ nach $\mathcal{E}(\Omega)$ ab, und (nach Fortsetzung) von $\mathcal{E}'(\Omega)$ nach $\mathcal{D}'(\Omega)$. Damit ist die Komposition $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ nicht direkt erklärbar, und als Ausweg zerlegen wir einen der beiden Operatoren, z.B. $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}u)(x) &= \overset{\mathrm{Os}}{\iint\limits_{\mathbb{R}^n_\xi \times \Omega}} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} a(x,y,\xi) u(y)\, \mathrm{d}y\, đ\xi \qquad (5.2)\\ &= \overset{\mathrm{Os}}{\iint\limits_{\mathbb{R}^n_\xi \times \Omega}} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} \chi(x,y) a(x,y,\xi) u(y)\, \mathrm{d}y\, đ\xi \\ &\quad + \overset{\mathrm{Os}}{\iint\limits_{\mathbb{R}^n_\xi \times \Omega}} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} (1-\chi(x,y)) a(x,y,\xi) u(y)\, \mathrm{d}y\, đ\xi,\end{aligned}$$

wobei wir die Funktion $\chi \in C^\infty(\Omega\times\Omega)$ so geschickt wählen, daß das erste Doppelintegral rechts den Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ in sich abbildet, und auch den Raum $\mathcal{E}(\Omega)$ in sich abbildet, und daß das zweite Doppelintegral ein glättender Operator von $\mathcal{E}'(\Omega)$ nach $\mathcal{E}(\Omega)$ ist.

Definition 5.7 (*Propere* **Abbildung**). *Eine stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen heißt* proper, *wenn das Urbild jeder kompakten Menge kompakt ist.*

Nun wählt man χ so, daß $\chi \equiv 1$ gilt in einer Umgebung von $\operatorname{diag}(\Omega \times \Omega)$. Dann liefert Satz 4.20 die gewünschte Aussage über das zweite Doppelintegral. Und weiterhin ist $\operatorname{supp}\chi$ so zu wählen, daß die beiden kanonischen Projektionen $(x,y) \mapsto x$ und $(x,y) \mapsto y$ *propere* Abbildungen sind von $\operatorname{supp}\chi$ nach Ω. Das liefert die gesuchte Eigenschaft für das erste Doppelintegral, und der dadurch dargestellte Operator heißt dann *eigentlich getragen*. Bei der Konstruktion von $\operatorname{supp}\chi$ denke man vielleicht an linsenförmige Umgebungen von $\operatorname{diag}(\Omega \times \Omega)$.

In der Darstellung (5.2) haben wir $\mathcal{A}$ zerlegt als $\mathcal{A} = \mathcal{A}_h + \mathcal{A}_r$, wobei wir $\mathcal{A}_h$ als Hauptbestandteil ansehen und $\mathcal{A}_r$ als Rest. Laut Satz 5.4 können wir für $\mathcal{A}_h$ auch ein Symbol $\sigma_{\mathcal{A}_h}$ finden (und nicht bloß eine Amplitude χa), und zwar ist $\sigma_{\mathcal{A}_h}(x,\xi) = \exp(-\mathrm{i}x\xi)\mathcal{A}_h \exp(\mathrm{i}x\xi)$. Für $\mathcal{A}_r$ werden wir nicht in jedem Fall ein Symbol finden können, manchmal müssen wir es bei einer Amplitudenfunktion bewenden lassen. Deshalb ist $\Psi^{-\infty}$ definiert als Menge aller Operatoren mit einer Amplitude in $S^{-\infty}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$, und nicht etwa als Menge aller Operatoren mit Symbol aus $S^{-\infty}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$.

Wir fassen zusammen:

Satz 5.8. *Sei $a = a(x,y,\xi) \in S^m_{\varrho,\delta}(\Omega\times\Omega\times\mathbb{R}^n)$ mit $m \in \mathbb{R}$ und $0 \le \delta < \varrho \le 1$, und sei $\mathcal{A}$ der dazugehörige ΨDO. Dann kann man $\mathcal{A}$ zerlegen als*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_h + \mathcal{A}_r,$$

wobei $\mathcal{A}_h$ ein eigentlich getragener ΨDO mit Symbol $\sigma_{\mathcal{A}_h} \in S^m_{\varrho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ ist, für dessen Symbol wir die asymptotische Entwicklung

$$\sigma_{\mathcal{A}_h}(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \left(\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x,y,\xi)\right)\big|_{y=x}$$

haben. Der Operator $\mathcal{A}_r$ ist ein ΨDO mit Amplitudenfunktion in $S^{-\infty}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$.

Wenn wir für $\mathcal{A}$ bereits eine Darstellung mit einem pseudodifferentiellen Symbol $a = a(x,\xi)$ haben, dann gibt es auch für $\mathcal{A}_r$ ein pseudodifferentielles Symbol.

Gelegentlich ist es nützlich, eine Beziehung zwischen Amplitudenfunktion und dem Schwartz–Kern des dazugehörigen Operators aufzustellen:

Lemma 5.9. *Sei $a = a(x,y,\xi) \in S^m_{\varrho,\delta}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ mit $m < -n$. Dann ist der Schwartz–Kern A des zu a gehörigen Operators $\mathcal{A}$ eine Funktion aus $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \times \Omega)$, und zwar*

$$A(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} a(x,y,\xi)\,\mathrm{d}\xi, \qquad (x,y) \in \Omega \times \Omega. \tag{5.3}$$

Beweis. Wir haben, für $u \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$(\mathcal{A}u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \int_\Omega e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} a(x,y,\xi) u(y)\,\mathrm{d}y\,\text{đ}\xi,$$

und wegen $m < -n$ können wir die Integrale tauschen, und es folgt tatsächlich

$$(\mathcal{A}u)(x) = \int_\Omega A(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y.$$

□

Satz 5.10. *Für einen Operator $\mathcal{A}$ auf Ω sind äquivalent:*

1. *$\mathcal{A}$ bildet linear und stetig von $\mathcal{E}'(\Omega)$ nach $\mathcal{E}(\Omega)$ ab,*
2. *$\mathcal{A}$ hat einen Schwartz–Kern $A \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$,*
3. *$\mathcal{A}$ ist ein ΨDO mit Amplitude $a \in S^{-\infty}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Die Äquivalenz von 1. und 2. ist enthalten im Schwartz–Kern–Theorem.

Sei $a \in S^{-\infty}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$. Dann ist A aus (5.3) eine Funktion aus dem $C^\infty(\Omega \times \Omega)$.

Sei nun $A \in C^\infty(\Omega \times \Omega)$ gegeben und $a \in S^{-\infty}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ gesucht. Wir wählen eine Funktion $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n_\xi} \chi(\xi)\,\text{đ}\xi = 1$ und setzen dann

$$a(x,y,\xi) = e^{-\mathrm{i}(x-y)\xi} A(x,y)\chi(\xi),$$

was man als Element des $S^{-\infty}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ nachweist. Und wenn man daraus einen Schwartz–Kern gemäß (5.3) bestimmt, kommt man wieder genau zu A. □

Im Folgenden wollen wir fast nur noch eigentlich getragene Operatoren betrachten.

Wir kommen zu asymptotischen Entwicklungen.

Unser bisheriger Zugang war (siehe den Beweis von Satz 5.4): zuerst verschafften wir uns ein Symbol $p \in S^m_{1,0}$, und für dieses bestimmten wir dann eine Zerlegung $p \sim \sum_{j=0}^\infty p_j$ mit $p_j \in S^{m-j}_{1,0}$, im Sinne von $p - \sum_{j=0}^{k-1} p_j \in S^{m-k}_{1,0}$ für alle k.

Jetzt wollen wir umgekehrt vorgehen: gegeben seien p_0, p_1, …, mit $p_j \in S^{m-j}_{1,0}$. Wir fragen uns, ob es dann ein $p \in S^m_{1,0}$ gibt mit $p \sim \sum_{j=0}^\infty p_j$?

Aus unserer Definition der asymptotischen Konvergenz ist klar, daß p eindeutig bestimmt sein muß mod $S^{-\infty}$.

Satz 5.11. *Seien p_0, p_1, …, gegeben mit $p_j \in S^{m-j}_{1,0}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Dann existiert ein eigentlich getragenes $p \in S^m_{1,0}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ mit $p \sim \sum_{j=0}^\infty p_j$.*

Beweis. Zur Vereinfachung wollen wir annehmen, daß die Symbole p_j globale Symbolabschätzungen genießen:

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p_j(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha\beta j} \langle\xi\rangle^{m-j-|\beta|}, \qquad \forall(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha, \beta, j.$$

Nun wählen wir eine Ausschälfunktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 0 & : |\xi| \leq 1, \\ 1 & : |\xi| \geq 2, \end{cases}$$

und wir probieren unser Glück mit

$$p(x,\xi) := \sum_{j=0}^\infty \varphi\left(\frac{\xi}{t_j}\right) p_j(x,\xi).$$

Hierbei bilden die t_0, t_1, ... eine (noch nicht gewählte) frei wählbare Folge reeller Zahlen, die streng monoton nach $+\infty$ strebt. Es ist klar, daß (für jedes feste (x,ξ)) diese Reihe nur endlich viele nichtverschwindende Summanden enthält. Weiterhin haben wir $\varphi(\frac{\cdot}{t_j}) \in S^0_{1,0}$, mit Symbolabschätzungen, die von j nicht abhängen[3]:

$$\left|\partial_\xi^\beta \varphi\left(\frac{\xi}{t_j}\right)\right| \leq C_\beta \langle\xi\rangle^{-|\beta|}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

wobei C_β nicht von j abhängt. Unser Ziel ist es jetzt, die Parameter t_j so zu wählen, daß

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left(\varphi\left(\frac{\xi}{t_j}\right) p_j(x,\xi)\right)\right| \leq 2^{-j} \langle\xi\rangle^{m+1-j-|\beta|}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \forall(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n,$$

für alle Kombinationen von α, β, j gilt, für die $|\alpha| + |\beta| \leq j$. Das ist möglich, denn mit einer generischen Konstanten C_j haben wir

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left(\varphi\left(\frac{\xi}{t_j}\right) p_j(x,\xi)\right)\right| &\leq \sum_{\beta'+\beta''=\beta} \binom{\beta}{\beta'} \left|\partial_\xi^{\beta'} \varphi\left(\frac{\xi}{t_j}\right)\right| \cdot \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta''} p_j(x,\xi)\right| \\
&\leq C_j \sum_{\beta'+\beta''=\beta} \langle\xi\rangle^{-|\beta'|} \langle\xi\rangle^{m-j-|\beta''|} \\
&\leq C_j \langle\xi\rangle^{m-j-|\beta|} \\
&= \frac{C_j}{\langle\xi\rangle} \langle\xi\rangle^{m+1-j-|\beta|}.
\end{aligned}$$

Nun können wir $\frac{|\xi|}{t_j} > 1$ annehmen, weil sonst der Faktor $\varphi(\dots)$ identisch gleich Null ist und demnach die gewünschte Ungleichung sowieso gilt. Also wählen wir t_j so groß, daß $\frac{C_j}{\langle t_j\rangle} \leq 2^{-j}$.

Auf diesem Wege haben wir dann gezeigt, daß

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha\beta} \langle\xi\rangle^{m+1-|\beta|},$$

also $p \in S^{m+1}_{1,0}$. Damit sind wir fast fertig, bloß die Ordnung ist um 1 zu hoch. Wenn wir in der definierenden Reihe für p den Summanden mit $j = 0$ temporär weglassen und obige Argumentation nochmal durchlaufen lassen, erkennen wir bald, daß tatsächlich $p \in S^m_{1,0}$ gilt. □

Das nächste Ergebnis ist nützlich, wenn man nachprüfen will, ob $p \sim \sum_j p_j$ gilt, ohne dazu sich mit den Ableitungen der Reihenabbruchfehler auseinanderzusetzen, also ohne

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left(p - \sum_{j=0}^{k-1} p_j(x,\xi)\right)\right|$$

für sämtliche α, β, k, x, ξ abzuschätzen.

[3] Diesen Gedanken hatten wir schon bei der Funktion $\theta \mapsto \chi(\varepsilon\theta)$ in (4.5) angewandt.

Satz 5.12. *Seien $p_j \in S^{m_j}_{1,0}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ gegeben mit $m_0 > m_1 > m_2 > \cdots \to -\infty$. Gegeben sei weiterhin ein $p \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ und für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ und alle Kompakta $K \Subset \Omega$ gebe es Zahlen $\mu = \mu(\alpha, \beta, K)$ sowie $C = C(\alpha, \beta, K)$ mit*

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)\right| \le C \langle\xi\rangle^\mu, \qquad \forall (x,\xi) \in K \times \mathbb{R}^n.$$

Wir setzen noch voraus, daß es für jedes Kompaktum $K \Subset \Omega$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ Zahlen $\mu = \mu(k, K)$ und $C_{k,K}$ gibt mit

$$\left|p(x,\xi) - \sum_{j=0}^{k-1} p_j(x,\xi)\right| \le C_{k,K} \langle\xi\rangle^{\mu(k,K)}, \qquad \forall (x,\xi) \in K \times \mathbb{R}^n$$

und $\lim_{k\to\infty} \mu(k,K) = -\infty$ für jedes K.

Dann ist $p \sim \sum_j p_j$.

Beweis. Siehe [13], Proposition 3.6. □

Schließlich schauen wir uns Algebra-Eigenschaften an. Wir haben:

- Operatoren aus $\Psi^m_{1,0}$, eigentlich getragen, mit $m \in \mathbb{R}$,
- dazugehörige Symbole aus $S^m_{1,0}$,
- Verknüpfungen.
  - Addition zweier Operatoren: $\Psi^{m_1}_{1,0} \times \Psi^{m_2}_{1,0} \to \Psi^{\max(m_1,m_2)}_{1,0}$
  - Skalare Multiplikation: $\mathbb{C} \times \Psi^m_{1,0} \to \Psi^m_{1,0}$
  - Komposition zweier Operatoren: $\Psi^{m_1}_{1,0} \times \Psi^{m_2}_{1,0} \to \Psi^{m_1+m_2}_{1,0}$
  - Adjungieren eines Operators: $\Psi^m_{1,0} \to \Psi^m_{1,0}$,
  - Transponieren eines Operators: $\Psi^m_{1,0} \to \Psi^m_{1,0}$.

Wir fassen dies in der Formulierung zusammen, daß die Menge $\Psi^\infty_{1,0} = \cup_{m\in\mathbb{R}} \Psi^m_{1,0}$ der eigentlich getragenen Pseudodifferentialoperatoren eine *Algebra* bildet.

Eine entsprechende Algebra findet man dann auch für die Menge der dazugehörigen pseudodifferentiellen Symbole $S^\infty_{1,0} = \cup_{m\in\mathbb{R}} S^m_{1,0}$.

5.4 Klassische Symbole

Bisher hatten wir uns die Symbolklassen $S^m_{1,0}$ bzw. $S^m_{\varrho,\delta}$ angeschaut. Die Elemente $p = p(x,\xi)$ davon haben als einzige ausbeutbare Eigenschaft Abschätzungen für alle Ableitungen der Form $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)$.

Das ist uns auf Dauer zu wenig, weshalb wir jetzt mehr verlangen wollen:

Definition 5.13 (Klassische Symbole, homogene Symbole). *Wir sagen, daß ein Symbol $p \in S^m_{1,0}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ ein* klassisches Symbol *ist (und schreiben dafür $p \in S^m_{\mathrm{cl}}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$), wenn es eine Ausschälfunktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ gibt und Funktionen $p_j \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0))$ sodaß jedes p_j positiv homogen von der Ordnung $m - j$ in der Variablen ξ ist:*

$$p_j(x, t\xi) = t^{m-j} p_j(x,\xi), \qquad \forall (x,\xi,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+,$$

und wenn zusätzlich

$$p(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^\infty \varphi(\xi) p_j(x,\xi)$$

gilt, im üblichen Sinne von $p - \sum_{j=0}^{k-1} \varphi p_j \in S^{m-k}$.

Die Funktionen p_j nennen wir homogene Symbole *und schreiben dies als $p_j \in S^{m-j}_{\mathrm{hom}}(\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0))$.*

Man beachte, daß homogene Symbole mit $m - j < 0$ im Ursprung meist Polstellen haben, und daß Symbole aus $S^m_{\varrho,\delta}$ mit $(\varrho, \delta) \neq (1, 0)$ nur in Ausnahmefällen klassische Symbole sein können !

Definition 5.14 (Klassische Operatoren). *Sei $p \in S^m_{\mathrm{cl}}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Dann heißt der dazugehörige ΨDO P, definiert durch*

$$(Pu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \int_\Omega e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} p(x, \xi) u(y) \, \mathrm{d}y \, đ\xi, \qquad u \in C_0^\infty(\Omega),$$

klassischer Pseudodifferentialoperator*, und wir schreiben dafür $P \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(\Omega)$.*

Beispiele sind:

- jeder PDO $P = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha_x$ mit Symbol $p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$,
- der Operator $\langle D \rangle$ mit Symbol $\langle \xi \rangle = \sqrt{1 + |\xi|^2}$.

Mit den Methoden von Satz 5.8 können wir zeigen:

Satz 5.15. *Sei $\mathcal{A} \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(\Omega)$. Dann kann man $\mathcal{A}$ zerlegen als $\mathcal{A} = \mathcal{A}_h + \mathcal{A}_r$, wobei $\mathcal{A}_h$ eigentlich getragen ist, zu $\Psi^m_{\mathrm{cl}}(\Omega)$ gehört, dieselbe asymptotische Symbolentwicklung hat, und $\mathcal{A}_r \in \Psi^{-\infty}(\Omega)$.*

Man rechnet nach, daß die klassischen ΨDO mit Symbolen aus $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} S^m_{\mathrm{cl}}$ auch eine Algebra bilden (wenn jeder der beiden an der Nacheinanderausführung beteiligten Faktoren eigentlich getragen ist). In diesem Sinne ist die Nacheinanderausführung klassischer Operatoren stets durchführbar.

Ein **Vorteil** der klassischen Symbole besteht darin, daß man erst jetzt sinnvoll vom Hauptsymbol eines Operators sprechen kann.

Ein **zweiter Vorteil** besteht in „Tensorproduktdarstellungen" der Form

$$(Pu)(x) \sim \sum_{j,l,m} a_{jlm}(x)(P_{jlm}(D)u)(x),$$

modulo glättender Terme, wobei $P \in S^M_{\mathrm{cl}}$, und $P_{jlm} \in S^{M-j}_{\mathrm{hom}}$ hat „konstante Koeffizienten". Weiterhin ist die Konvergenz der Reihen $\sum_{l,m}$ absolut unproblematisch.

Das wollen wir uns jetzt aus der Nähe anschauen. Sei

$$p(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^\infty \varphi(\xi) p_j(x, \xi) \in S^M_{\mathrm{cl}}(\Omega \times \mathbb{R}^n),$$

mit einer Ausschälfunktion φ. Dann ist

$$p_j(x, \xi) = p_j\left(x, |\xi| \frac{\xi}{|\xi|}\right) = |\xi|^{M-j} p_j\left(x, \frac{\xi}{|\xi|}\right),$$

also wird p_j eindeutig festgelegt durch seine Werte auf $\Omega \times S^{n-1}$. Sei z.B. $n = 2$, dann können wir schreiben

$$\frac{\xi}{|\xi|} = \omega = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \in S^1, \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

also auch

$$p_j(x, \xi) = |\xi|^{M-j} p_j(x_1, x_2, \cos t, \sin t), \qquad t = t(\xi).$$

Für festes x und festes $|\xi|$ ist dann p_j 2π–periodisch in t, also haben wir die Fourierzerlegung

$$p_j(x, \xi) = |\xi|^{M-j} \left(\frac{a_0(x)}{2} + \sum_{l=1}^\infty (a_l(x) \cos(l \cdot t(\xi)) + b_l(x) \sin(l \cdot t(\xi))) \right),$$

und das sieht schon fast so aus wie die obige Tensorproduktdarstellung.

Für den allgemeinen Fall brauchen wir die Kugelflächenfunktionen. Dabei folgt unsere Darstellung [4, Band 2], wovon wir auch die Notation übernehmen.

Sei $x = (x_1, x_2, \dots, x_{p+2}) \in \mathbb{R}^{p+2}$ und $p \geq 1$. Ein Polynom $H_n = H_n(x)$ heißt *harmonisches Polynom vom Grad* n, wenn $\triangle H_n(x) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}^{p+2}$ ist, und zusätzlich

$$H_n(\lambda x) = \lambda^n H_n(x), \qquad \forall (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Hierbei sei $n \geq 0$. Es gibt genau

$$h(h, p) = (2n + p)\frac{(n + p - 1)!}{p!n!} = \mathcal{O}(\langle n \rangle^p)$$

linear unabhängige homogene Polynome vom Grad n, siehe Abschnitt 11.2 in [4]. Diese haben (siehe Theorem 1 in Abschnitt 11.2 in [4]) die folgende Form:

Seien $m_0, \dots, m_p$ ganze Zahlen mit

$$n = m_0 \geq m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_{p-1} \geq |m_p|,$$

und sei r_k definiert durch

$$r_k = \left(x_{k+1}^2 + \cdots + x_{p+2}^2\right)^{1/2}, \quad k = 0, \dots, p, \quad r_0 = r.$$

Dann bilden die Funktionen $H(\{m_k\}; \cdot)$ mit

$$\begin{aligned} H(\{m_k\}, x) &:= H(n, m_1, \dots, m_p, x) = \\ &= \left(\frac{x_{p+1}}{r_p} + \mathrm{i}\frac{x_{p+2}}{r_p}\right)^{m_p} r_p^{m_p} \prod_{k=0}^{p-1} r_k^{m_k - m_{k+1}} C_{m_k - m_{k+1}}^{m_{k+1} + (p-k)/2}\left(\frac{x_{k+1}}{r_k}\right) \end{aligned}$$

ein vollständiges System von $h(n, p)$ linear unabhängigen harmonischen Polynomen vom Grad n. Die Funktionen $C_{m_k - m_{k+1}}^{m_{k+1} + (p-k)/2}$ sind die Gegenbauer–Polynome (siehe Abschnitt 3.5 in [4, Band 1]), und sie können mit den hypergeometrischen Funktionen ${}_2\mathrm{F}_1(a, b; c; z)$ geschrieben werden wie folgt:

$$\begin{aligned} n! C_n^\lambda(x) &= (2\lambda)_n \, {}_2\mathrm{F}_1\left(-n, n + 2\lambda; \lambda + \frac{1}{2}; \frac{1 - x}{2}\right), \\ {}_2\mathrm{F}_1(a, b; c; z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k, \\ (a)_n &= \frac{\Gamma(a + n)}{\Gamma(a)}. \end{aligned}$$

Die Einschränkung dieser Funktionen auf die Einheitssphäre $\{|x| = 1\}$ ergibt ein vollständiges System von orthogonalen Funktionen im Sinne einer Orthogonalbasis des $L^2(\{|x| = 1\})$. Diese Funktionen werden *sphärische harmonische Funktionen* oder auch *Kugelflächenfunktionen* genannt, und man schreibt sie als $Y(\{m_k\}, \theta, \varphi)$ mit

$$Y(\{m_k\}, \theta, \varphi) := r^{-n} H(\{m_k\}, x),$$

wobei $(r, \theta, \varphi) = (r, \theta_1, \dots, \theta_p, \varphi)$ die Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^{p+2}$ sind:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos\theta_1, \\ x_2 &= r \sin\theta_1 \cos\theta_2, \\ x_3 &= r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3, \\ &\dots, \\ x_p &= r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_{p-1} \cos\theta_p, \\ x_{p+1} &= r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_{p-1} \sin\theta_p \cos\varphi, \\ x_{p+2} &= r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_{p-1} \sin\theta_p \sin\varphi, \\ &0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta_1, \dots, \theta_p \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Das Volumenelement ist dann

$$\mathrm{d}V = r^{p+1}(\sin\theta_1)^p(\sin\theta_2)^{p-1}\dots(\sin\theta_p)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta_1\dots\mathrm{d}\theta_p\,\mathrm{d}\varphi,$$

und das Oberflächenelement lautet

$$\mathrm{d}\sigma = r^{p+1}(\sin\theta_1)^p(\sin\theta_2)^{p-1}\dots(\sin\theta_p)\,\mathrm{d}\theta_1\dots\mathrm{d}\theta_p\,\mathrm{d}\varphi.$$

Der Laplace-Operator des $\mathbb{R}^{p+2}$ wird zu

$$\begin{aligned}
\triangle &= \triangle_r + \frac{1}{r^2}\triangle_S \qquad (5.4)\\
&= r^{-p-1}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{p+1}\frac{\partial}{\partial r}\right)\\
&\quad + \frac{1}{r^2}\frac{1}{(\sin\theta_1)^p}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left((\sin\theta_1)^p\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)\\
&\quad + \frac{1}{r^2}\frac{1}{(\sin\theta_1)^2}\frac{1}{(\sin\theta_2)^{p-1}}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left((\sin\theta_2)^{p-1}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)\\
&\quad + \frac{1}{r^2}\frac{1}{(\sin\theta_1\sin\theta_2)^2}\frac{1}{(\sin\theta_3)^{p-2}}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\left((\sin\theta_3)^{p-2}\frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)\\
&\quad \dots\\
&\quad + \frac{1}{r^2}\frac{1}{(\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{p-1})^2}\frac{1}{(\sin\theta_p)^1}\frac{\partial}{\partial\theta_p}\left((\sin\theta_p)^1\frac{\partial}{\partial\theta_p}\right)\\
&\quad + \frac{1}{r^2}\frac{1}{(\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_p)^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.
\end{aligned}$$

Hierbei operiert $\triangle_r$ nur in radialer Richung, und der Operator $\triangle_S$ wirkt nur auf die Winkel. Man nennt $\triangle_S$ auch *Laplace–Beltrami–Operator der Einheitssphäre.*

Wir halten fest, daß die Kugelflächenfunktionen $Y(\{m_k\},\theta,\varphi)$ nicht nur eine Basis für den L^2 auf der Sphäre bilden, sondern sie sind auch Eigenfunktionen von $\triangle_S$:

Satz 5.16. *Sei $Y(\{m_k\},\cdot,\cdot)$ eine Kugelflächenfunktion vom Grad n. Dann ist*

$$\triangle_S Y(\{m_k\},\theta,\varphi) = -n(n+p)Y(\{m_k\},\theta,\varphi).$$

Beweis. Die Funktion $H(\{m_k\},x) = r^nY(\{m_k\},\theta,\varphi)$ ist ein harmonisches Polynom vom Grad n, also finden wir

$$0 = \triangle H = \triangle(r^nY) = (\triangle_r r^n)Y + r^{n-2}\triangle_S Y = r^{n-2}(n(n+p)+\triangle_S)Y.$$

□

Nun kehren wir zu den Notationen wie im Rest dieses Skripts zurück:

$$\begin{aligned}
p+2 &\longmapsto n,\\
(n,m_1,\dots,m_p) &\longmapsto (l,m), \quad 1\le m\le h(l,n-2) = O(\langle l\rangle^{n-2}),\\
(x_1,\dots,x_{p+2}) &\longmapsto \xi\in\mathbb{R}^n,\\
(\theta_1,\dots,\theta_p,\varphi) &\longmapsto \frac{\xi}{|\xi|}\in S^{n-1},\\
Y(\{m_k\},\theta,\varphi) &\longmapsto Y_{lm}(\xi) \text{ bzw. } Y_{lm}(\theta,\varphi).
\end{aligned}$$

Bemerkung 5.17. *Wir müßten eigentlich $Y_{lm}(\xi/|\xi|)$ schreiben, aber aus Gründen der Einfachheit der Notation wollen wir vereinbaren, daß das Argument ξ von Y_{lm} stillschweigend auf 1 normiert wird.*

In der neuen Schreibweise haben wir dann die Ergebnisse:

$$\begin{aligned}
&\{Y_{lm}\}_{l=0,\dots,\infty,\ m=1,\dots,h(l,n-2)} \text{ ist eine Orthogonalbasis des } L^2(S^{n-1}),\\
&h(l,n-2) = O(\langle l\rangle^{n-2}),\\
&Y_{lm}\in C^\infty(S^{n-1}) \quad \forall l,m,\\
&-\triangle_S Y_{lm}(\xi) = l(l+n-2)Y_{lm}(\xi).
\end{aligned}$$

Wir können oBdA voraussetzen, daß $\|Y_{lm}\|_{L^2(S^{n-1})} = 1$ für alle l, m.

Sei nun $p_j \in S^{M-j}_{\text{hom}}$, dann ist

$$p_j(x,\xi) = |\xi|^{M-j} p_j\left(x, \frac{\xi}{|\xi|}\right) = |\xi|^{M-j} \sum_{l,m} a_{jlm}(x) Y_{lm}(\xi),$$
$$a_{jlm}(x) = \left\langle p_j\left(x, \frac{\xi}{|\xi|}\right), Y_{lm}(\xi)\right\rangle_{L^2(S^{n-1}_\xi)}.$$

Diese Fourierreihe konvergiert natürlich im $L^2(S^{n-1})$, für jedes feste $x \in \Omega$. Aber in Wirklichkeit ist die Konvergenz viel schneller, denn für $l \geq 1$ und jedes $N \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\begin{aligned}
|a_{jlm}(x)| &= \left|\left\langle p_j, (-\triangle_S)^N (l(l+n-2))^{-N} Y_{lm}\right\rangle\right| \\
&= \frac{1}{(l(l+n-2))^N} \left|\left\langle (-\triangle_S)^N p_j, Y_{lm}\right\rangle\right| \\
&\leq \frac{C_N}{l^{2N}} \left\|\triangle_S^N p_j(x,\cdot)\right\|_{L^2(S^{n-1})},
\end{aligned}$$

denn der Operator $\triangle_S$ ist selbst-adjungiert. Hierbei spielt eine wesentliche Rolle, daß die Sphäre S^{n-1} eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand ist.

Die Anzahl der erlaubten m hängt polynomial von l ab, denn $h(l, n-2) = \mathcal{O}(\langle l\rangle^{n-2})$, aber man darf N beliebig groß wählen, und so ergibt sich, daß die Folge $(\sum_m |a_{jlm}|)_{l=0,1,2,\dots}$ schneller abklingt als jede Potenz von l^{-1}.

5.5 Elliptische ΨDO

Jetzt soll unser Ziel darin bestehen, ΨDO zu „invertieren". Wir stellen ziemlich schnell fest, daß dies nicht für alle Operatoren klappen kann. Denn sei z.B. $p \in S^m_{\text{cl}}$ und $p \equiv 0$ in einer konischen Umgebung von (x_0, ξ_0) mit $\xi_0 \neq 0$. Wenn nun $u \in L^2$ eine Funktion ist, deren Fouriertransformierte identisch gleich 0 ist außerhalb einer winzigen konischen Umgebung von ξ_0, dann ist $Pu \equiv 0$, aber u ist nicht die Nullfunktion. Wir hätten also einen Kern von P, der Funktionen aus dem L^2 enthält. Das stört uns: wenn es schon einen nichttrivialen Kern des Operators P geben sollte, dann hätten wir gerne, daß dieser nur glatte Funktionen enthält.

Wir haben also herausgefunden, daß wünschenswerterweise das Symbol eines solchen Operators nicht in einer konischen Umgebung verschwinden darf. Tatsächlich werden wir uns jetzt mit Symbolen beschäftigen, die man „nach unten abschätzen" kann:

Definition 5.18 (Elliptische Symbole). *Ein Symbol $p \in S^m_{\varrho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \delta, \varrho \leq 1$ heißt* elliptisch*, wenn es ein R und ein $c > 0$ gibt mit*

$$|p(x,\xi)| \geq c\,\langle\xi\rangle^m, \qquad \forall x \in \Omega, \quad |\xi| > R.$$

Für ein klassisches Symbol $p \in S^m_{\text{cl}}$ mit Hauptsymbol p_m bedeutet das $|p_m(x,\xi)| \geq c|\xi|^m$ für alle $x \in \Omega$ und $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0$.

Eine Verallgemeinerung sind hypo-elliptische Symbole:

Definition 5.19 (Hypo-elliptische Symbole). *Ein Symbol $p \in S^m_{\varrho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \delta, \varrho \leq 1$ heißt* hypo-elliptisch*, wenn es ein R und ein $c > 0$ sowie ein $m_0 \in \mathbb{R}$ gibt mit*

$$|p(x,\xi)| \geq c\,\langle\xi\rangle^{m_0}, \qquad \forall x \in \Omega, \quad |\xi| > R,$$

und wenn zusätzlich noch die Abschätzungen

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta,K} |p(x,\xi)|\,\langle\xi\rangle^{-\varrho|\beta|+\delta|\alpha|}, \qquad \forall x \in K \Subset \Omega, \quad |\xi| > R, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$$

gelten.

Man erkennt schnell, daß $m_0 \leq m$ gelten muß.

Beispiel: Sei $P = P(x, D_x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ ein Differentialoperator mit Hauptsymbol $p_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$, für das $|p(x,\xi)| \geq c|\xi|^m$ gilt, für alle (x,ξ).

Beispiel: Der Operator $\partial_t - \triangle_x$ ist hypo-elliptisch im $\mathbb{R}^{1+n}$, aber nicht elliptisch.

Beispiel: Das Symbol $\sqrt{1+\xi_1^2+\xi_2^4}$ ist hypo-elliptisch, aber nicht elliptisch.

Ab jetzt sei P elliptisch, eigentlich getragen in Ω, $Pu = f$ mit $u \in C_0^\infty(\Omega)$ und $f \in C^\infty(\Omega)$.

Zur Vereinfachung wollen wir annehmen, daß $P \in \Psi_{\mathrm{cl}}^m(\Omega)$ ist, aber hypo-elliptische $P \in \Psi_{\varrho,\delta}^m(\Omega)$ mit $0 \leq \delta < \varrho \leq 1$ wären auch möglich.

Unser Ziel ist ein Operator Q mit $Q \circ P = I$. Wir setzen Q als ΨDO mit Symbol q an, dann erhalten wir, daß

$$1 \overset{!}{\sim} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \left(\partial_\xi^\alpha q(x,\xi)\right) \left(D_x^\alpha p(x,\xi)\right) \tag{5.5}$$

sein soll. Das führt uns zum Ansatz $q \in S_{\mathrm{cl}}^{-m}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, also

$$q(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(\xi) q_j(x,\xi), \qquad q_j \in S_{\mathrm{hom}}^{-m-j}.$$

Eine entsprechende Zerlegung haben wir auch für p. Laut Hausaufgabe darf man asymptotische Reihen termweise differenzieren, also bekommen wir

$$1 \overset{!}{\sim} \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \left(\partial_\xi^\alpha q_j(x,\xi)\right) \left(D_x^\alpha p_k(x,\xi)\right).$$

Die Terme der Ordnung $-l$ mit $l = 0, 1, 2, \ldots$ sind genau

$$\sum_{j+k+|\alpha|=l} \frac{1}{\alpha!} \left(\partial_\xi^\alpha q_j(x,\xi)\right) \left(D_x^\alpha p_k(x,\xi)\right).$$

Für $l = 0$ soll dies gerade gleich 1 sein, also $1 = q_0(x,\xi) p_0(x,\xi)$, und somit

$$q_0 = \frac{1}{p_0} \in S_{\mathrm{hom}}^{-m}.$$

An dieser Stelle benutzen wir entscheidend die Elliptizität von p.

Und für $l = 1$ haben wir dann

$$0 \overset{!}{=} \sum_{|\alpha|=1} \frac{1}{\alpha!} \left(\partial_\xi^\alpha q_0(x,\xi)\right) \left(D_x^\alpha p_0(x,\xi)\right) + q_1 p_0 + q_0 p_1,$$

was uns auf

$$q_1 = -\frac{1}{p_0} \left(\sum_{|\alpha|=1} \frac{1}{\alpha!} \left(\partial_\xi^\alpha q_0(x,\xi)\right) \left(D_x^\alpha p_0(x,\xi)\right) + q_0 p_1 \right) \in S_{\mathrm{hom}}^{-m-1}$$

führt. Analog bestimmt man die restlichen Terme, und man findet $q_j \in S_{\mathrm{hom}}^{-m-j}$. Mit einer Ausschälfunktion φ findet man dann ein $q \in S_{\mathrm{cl}}^{-m}$, für das

$$q \sim \sum_{j=0}^{\infty} \varphi q_j.$$

Man rechnet nach, daß gemäß unserer Konstruktion dann wirklich (5.5) gilt.

Wir tragen unsere Ergebnisse zusammen:

Satz 5.20. *Sei $p \in S^m_{\mathrm{cl}}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ mit $m \in \mathbb{R}$, elliptisch, nicht notwendig eigentlich getragen. Dann existiert mindestens ein $q \in S^{-m}_{\mathrm{cl}}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, elliptisch und eigentlich getragen, sodaß für die dazugehörigen Operatoren P und Q gilt:*

$$Q(x, D_x) \circ P(x, D_x) = I + R(x, D_x),$$

wobei $R \in \Psi^{-\infty}$.

Jedes solche Q heißt *Links–Parametrix* von P. Der Satz gilt auch für $S^m_{1,0}$ anstatt S^m_{cl}, ist dann allerdings etwas aufwendiger zu beweisen. Einzelheiten finden sich in [13].

Eine noch offene Frage ist die nach der Eindeutigkeit von Q, und ob Q auch eine Rechts-Parametrix ist.

Definition 5.21. *Seien p_1 und p_2 aus $S^m_{1,0}$, für $m \in \mathbb{R}$. Wir nennen p_1 und p_2 äquivalent zueinander, $p_1 \sim p_2$, wenn $p_1 - p_2 \in S^{-\infty}$.*

Offensichtlich ist dies eine Äquivalenzrelation. Äquivalente klassische Symbole haben die gleiche asymptotische Entwicklung.

Man erkennt: wenn p_1 elliptisch ist und $p_1 \sim p_2$, dann ist auch p_2 elliptisch.

Zu jedem Symbol finden wir ein dazu äquivalentes Symbol, das eigentlich getragen ist. Anders formuliert: jede Äquivalenzklasse von Symbolen enthält einen eigentlich getragenen Repräsentanten. Sämtliche folgenden Rechnungen beziehen sich auf einen solchen Repräsentanten.

Für solche Äquivalenzklassen führen wir eine Verknüpfung $\sharp$ ein,

$$p \sharp q = \sigma(P \circ Q),$$

wobei σ diejenige Abbildung ist, die einem ΨDO sein (eindeutig bestimmtes) Symbol zuordnet.

Die Verknüpfung $\sharp$ ist eine zweistellige Operation auf der Restklassenmenge

$$S^{\mathrm{ellipt}} := \bigcup_{m \in \mathbb{R}} S^{m,\mathrm{ellipt}}_{1,0} \Big/ \sim .$$

Diese ist (beinahe) offensichtlich assoziativ und hat mindestens ein linksneutrales Element, nämlich $e = e(x, \xi) \equiv 1$, das Symbol des identischen Operators. Zu jedem elliptischen Symbol $p \in S^{\mathrm{ellipt}}$ existiert mindestens ein elliptisches Symbol $q \in S^{\mathrm{ellipt}}$ mit $q \sharp p = e$, also hat jedes Element von S^{ellipt} mindestens ein linksinverses Element. Nach einem bekannten Ergebnis aus der Algebra ist dann $(S^{\mathrm{ellipt}}, \sharp)$ eine Gruppe. Demnach ist das linksinverse Element eindeutig bestimmt, und es ist auch rechtsinvers.

Nun wollen wir diese Ergebnisse anwenden.

Sei $Pu = f$ mit $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ und $P \in \Psi^{m,\mathrm{ellipt}}_{1,0}$ sowie eigentlich getragen. Dann existiert ein Q mit $Q \circ P = I + R$, wobei $Q \in \Psi^{-m,\mathrm{ellipt}}_{1,0}$ und R bildet von $\mathcal{E}'(\Omega)$ nach $\mathcal{E}(\Omega)$ ab. Wir haben dann also

$$u + Ru = (I + R)u = Q \circ Pu = Qf,$$

also $u = Qf - Ru$, wobei $Ru \in C^\infty(\Omega)$. Jetzt wenden wir Satz 4.27 zweifach an, einmal für Q und einmal für P (man beachte, daß für ΨDOn gerade $S_\Phi = \mathrm{diag}(\Omega \times \Omega)$ ist):

$$\text{sing-supp}(u) = \text{sing-supp}(Qf) \subset \text{sing-supp}(f) = \text{sing-supp}(Pu) \subset \text{sing-supp}(u).$$

Damit haben wir gezeigt:

Satz 5.22. *Sei $P \in \Psi^m_{1,0}(\Omega)$ elliptisch und eigentlich getragen. Dann gilt für $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ die Identität*

$$\text{sing-supp}(u) = \text{sing-supp}(Pu).$$

Eine entsprechende Gleichheit gilt auch für elliptische $P \in \Psi^m_{1,0}(\mathbb{R}^n)$ (mit globalen Symbolabschätzungen) und $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Als Konsequenz haben wir dann, daß der Kern von P nur aus glatten Funktionen bestehen kann, wie wir es uns gewünscht hatten.

Kapitel 6

ΨDO auf Mannigfaltigkeiten

Es erscheint naheliegend, ΨDO auf Mannigfaltigkeiten dadurch definieren zu wollen, daß man sie „in Karten herunterzieht“. Dabei wäre allerdings zu zeigen, daß die Symbole sich bei Kartenwechsel korrekt verhalten, ansonsten sind Pseudodifferentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten nicht invariant definierbar.

6.1 ΨDO und Koordinatentransformationen

Seien Ω und Ω_1 offene Gebiete im $\mathbb{R}^n$, und sei

$$\kappa\colon \Omega \to \Omega_1$$

ein Diffeomorphismus mit inverser Abbildung $\kappa_1 := \kappa^{-1}$. Dann haben wir den Pullback κ^*,

$$\begin{aligned}
&\kappa^*\colon C^\infty(\Omega_1) \to C^\infty(\Omega),\\
&\kappa^*\colon u \mapsto u \circ \kappa,
\end{aligned}$$

der ein Isomorphismus ist, stetig in den entsprechenden Topologien. Er bildet auch zwischen $C_0^\infty(\Omega_1)$ und $C_0^\infty(\Omega)$ ab.

Klar ist: Sei $\mathcal{A}$ ein PDO im Gebiet Ω. Dann erhalten wir durch Umschreiben auf Variablen im Gebiet Ω_1 wieder einen PDO $\mathcal{A}_1$, der gegeben ist durch

$$\mathcal{A}_1 u := (\mathcal{A}(\kappa^* u)) \circ \kappa_1, \qquad u \in C_0^\infty(\Omega_1).$$

Das ist nichts anderes als $\mathcal{A}_1 = (\kappa^*)^{-1} \circ \mathcal{A} \circ \kappa^*$, und wir schreiben dafür auch $\mathcal{A}^\kappa$, und nennen dies den *Transfer von $\mathcal{A}$ zu Ω_1 mittels κ.*

Insgesamt bekommen wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
C^\infty(\Omega) & \xrightarrow{\mathcal{A}} & C^\infty(\Omega) \\
\Big\uparrow{\scriptstyle \kappa^*} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \kappa^*} \\
C^\infty(\Omega_1) & \xrightarrow{\mathcal{A}_1} & C^\infty(\Omega_1).
\end{array}$$

Wir wollen jetzt der Frage nachgehen, ob dies sich auch für einen ΨDO $\mathcal{A}$ durchführen läßt.

Sei also $\mathcal{A}$ gegeben durch

$$(\mathcal{A}u)(x) := \overset{\mathrm{Os}}{\iint\limits_{\mathbb{R}^n \times \Omega}} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} a(x,y,\xi) u(y)\,\mathrm{d}y\,\text{đ}\xi, \qquad x \in \Omega, \quad u \in C_0^\infty(\Omega),$$

wobei wir das Integral auch als iteriertes Integral auffassen können. Wir setzen voraus, daß $a \in S^m_{\varrho,\delta}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ mit $0 \le \delta < \varrho \le 1$.

Für $u \in C_0^\infty(\Omega_1)$ setzen wir dann $\mathcal{A}_1 u := (\mathcal{A}(\kappa^* u)) \circ \kappa_1$, also

$$(\mathcal{A}_1 u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \int_{\Omega_1} e^{\mathrm{i}(\kappa_1(x)-y)\xi} a(\kappa_1(x), y, \xi) u(\kappa(y))\,\mathrm{d}y\,\text{đ}\xi, \qquad x \in \Omega_1, \qquad u \in C_0^\infty(\Omega_1).$$

Wegen der geänderten Phasenfunktion und dem geänderten Argument von u sieht das zunächst nicht nach einem ΨDO aus.

Wir wollen folgende Fragen beantworten:

- ist $\mathcal{A}_1$ als ΨDO darstellbar ?
- wie sähe eine Amplitude $a_1 = a_1(x, y, \xi)$ aus ?
- wie sieht das Symbol $\sigma_{\mathcal{A}_1} = \sigma_{\mathcal{A}_1}(x, \xi)$ aus ?

Die erste Frage werden wir durch eine passende Substitution im Integranden positiv beantworten, woraus dann eine Antwort auf die zweite Frage sich ergeben wird. Und die Antwort auf die dritte Frage kommt aus Satz 5.4.

Die zentrale Herausforderung besteht natürlich darin, Formeln zu bekommen, die man auch verstehen kann.

Zunächst setzen wir $z = \kappa(y)$ oder $y = \kappa_1(z)$, also

$$(\mathcal{A}_1 u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} \int_{\Omega_1} e^{\mathrm{i}(\kappa_1(x)-\kappa_1(z))\xi} a(\kappa_1(x), \kappa_1(z), \xi) \, |\det \kappa_1'(z)| \, u(z) \, \mathrm{d}z \, đ\xi.$$

Nun taufen wir die Integrationsvariablen um, und es entsteht

$$(\mathcal{A}_1 u)(x) = \iint_{\mathbb{R}^n_\theta \times \Omega_1} e^{\mathrm{i}(\kappa_1(x)-\kappa_1(y))\theta} a(\kappa_1(x), \kappa_1(y), \theta) \, |\det \kappa_1'(y)| \, u(y) \, \mathrm{d}y \, đ\theta, \qquad x \in \Omega_1, \quad u \in C_0^\infty(\Omega_1). \tag{6.1}$$

Zunächst zeigen wir, daß dieses $\mathcal{A}_1$ auf einen ΨDO transformiert werden kann:

Satz 6.1. *Sei $a \in S^m_{\varrho,\delta}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ mit $0 \le \delta < \varrho \le 1$ und $1 - \varrho \le \delta$. Sei $\Phi = \Phi(x, y, \theta)$ eine Phasenfunktion, die linear in θ ist, und es gelte*

$$\operatorname{grad}_\theta \Phi(x, y, \theta) = 0 \iff x = y.$$

Wir nehmen an, daß Φ all diese Eigenschaften sogar auf einem größeren Gebiet $\tilde{\Omega} \times \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^n$ erfüllt. Weiterhin sei $a(x, y, \theta) = 0$ für alle x, y mit $|x - y| > \varepsilon$. Dann ist der FIO $\mathcal{A}$, der (als iteriertes oder oszillierendes Integral) gegeben wird durch

$$(\mathcal{A}u)(x) := \iint_{\mathbb{R}^n_\theta \times \Omega} e^{\mathrm{i}\Phi(x,y,\theta)} a(x, y, \theta) u(y) \, \mathrm{d}y \, đ\theta, \qquad x \in \Omega, \quad u \in C_0^\infty(\Omega),$$

darstellbar als ein ΨDO, und wir haben (wenn ε klein genug ist) die Darstellung (als iteriertes oder oszillierendes Integral)

$$(\mathcal{A}u)(x) = \iint_{\mathbb{R}^n_\xi \times \Omega} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} a(x, y, \psi(x, y)\xi) \, |\det \psi(x, y)| \, u(y) \, \mathrm{d}y \, đ\xi, \tag{6.2}$$

wobei die Matrix-wertige Funktion $\psi = \psi(x, y)$ im Beweis konstruiert wird. Die Amplitudenfunktion $a_1 = a_1(x, y, \xi) := a(x, y, \psi(x, y)\xi) |\det \psi(x, y)|$ gehört zur Symbolklasse $S^m_{\varrho,\delta}$.

Beweis. Weil Φ linear in θ ist, haben wir

$$\Phi(x, y, \theta) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(x, y)\theta_j, \qquad \Phi_j(x, y) = \frac{\partial \Phi(x, y, \theta)}{\partial \theta_j}.$$

Es ist $\Phi_j(x, x) = 0$ für alle j und alle $x \in \Omega$.

Wenn nun $\Phi_j(x, y) = 0$ ist für alle j, dann muß $x = y$ sein.

Wir haben $\Phi(x, x, \theta) = 0$, und wenn wir dies nach x ableiten, bekommen wir

$$\left(\operatorname{grad}_x \Phi(x, y, \theta)\right)\big|_{x=y} + \left(\operatorname{grad}_y \Phi(x, y, \theta)\right)\big|_{x=y} = 0.$$

Nun ist Φ eine Phasenfunktion, also ist per definitionem

$$\operatorname{grad}_{x,y,\theta} \Phi(x,y,\theta) \neq 0, \qquad \forall (x,y,\theta) \in \Omega \times \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0).$$

Wenn jetzt $\operatorname{grad}_\theta \Phi(x,y,\theta) = 0$ sein sollte, dann ist einerseits (laut Voraussetzung) $x = y$, andererseits muß dann $\operatorname{grad}_x \Phi(x,y,\theta) \neq 0$ sein.

Für gewählte θ und x existiert dann ein Index $k \in \{1,\dots,n\}$, sodaß

$$\left(\frac{\partial \Phi(x,y,\theta)}{\partial x_k}\right)_{|y=x} \neq 0.$$

Das bedeutet aber

$$0 \neq \left(\frac{\partial \Phi(x,y,\theta)}{\partial x_k}\right)_{|y=x} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi_j(x,y)}{\partial x_k}\right)_{|y=x} \theta_j .$$

Also bildet die Matrix

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1}\Phi_1(x,y) & \dots & \partial_{x_1}\Phi_n(x,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n}\Phi_1(x,y) & \dots & \partial_{x_n}\Phi_n(x,y) \end{pmatrix}_{|y=x}$$

den Vektor $\theta \neq 0$ niemals auf $\vec{0}$ ab, ist also regulär, hat also eine Determinante $\neq 0$, für alle $(x,\theta) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$.

Die fragliche Matrix ist nun aber nichts anderes als

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \partial_{\theta_1} & \partial_{\theta_2} & \dots & \partial_{\theta_n} \end{pmatrix} \Phi(x,y,\theta)_{|y=x}.$$

Weiterhin: nach Mittelwertsatz ist

$$\begin{aligned} \Phi_j(x,y) = \Phi_j(x,y) - \Phi_j(x,x) &= \int_{t=0}^{1} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_j(x, x + t(y-x))\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{t=0}^{1} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial y_k}\right)(x, x+t(y-x))\,\mathrm{d}t \right)(y_k - x_k) \\ &=: \sum_{k=1}^{n} \Phi_{k,j}(x,y)(x_k - y_k), \end{aligned}$$

wobei jedes $\Phi_{k,j}$ durch das entsprechende Integral gegeben wird (bis auf das Vorzeichen). Wenn wir y nach x schicken, bekommen wir (mit einer Betrachtung von oben), daß

$$\Phi_{k,j}(x,x) = \left(\frac{\partial \Phi_j(x,y)}{\partial x_k}\right)_{|y=x}.$$

Wir definieren nun eine Matrix $\Phi(x,y)$,

$$\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} \Phi_{1,1}(x,y) & \dots & \Phi_{1,n}(x,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n,1}(x,y) & \dots & \Phi_{n,n}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Oben haben wir bereits gezeigt, daß $\Phi(x,x)$ invertierbar ist. Nach Stetigkeitsgründen ist dann auch $\Phi(x,y)$ invertierbar, wenn $|x-y| < \varepsilon$ und ε klein ist.

Wir setzen für solche x, y dann

$$\psi(x,y) := (\Phi(x,y))^{-1}.$$

Das ist die in der Behauptung genannte Matrix-wertige Funktion ψ. Weiterhin vermerken wir, daß

$$\psi(x,x) = \left(\begin{pmatrix} \partial_{x_1}\partial_{\theta_1} & \dots & \partial_{x_1}\partial_{\theta_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n}\partial_{\theta_1} & \dots & \partial_{x_n}\partial_{\theta_n} \end{pmatrix} \Phi(x,y,\theta)\Big|_{y=x} \right)^{-1} . \tag{6.3}$$

Nun ist

$$\Phi(x,y,\theta) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(x,y)\theta_j = \sum_{j,k=1}^{n} \Phi_{k,j}(x,y)(x_k - y_k)\theta_j = \langle x-y, \Phi(x,y)\theta \rangle \,,$$

und es bietet sich die Transformation

$$\xi = \Phi(x,y)\theta \iff \theta = \psi(x,y)\xi$$

an, für die wir $\Phi(x,y,\theta) = (x-y)\xi$ erhalten.

Damit bekommen wir nun tatsächlich die gewünschte Darstellung (6.2).

Es bleibt lediglich noch zu zeigen, daß a_1 zur Klasse $S^m_{\varrho,\delta}$ gehört. Das ergibt sich aber aus $a \in S^m_{\varrho,\delta}$, der Voraussetzung $1-\varrho \le \delta$ und einer länglichen Rechnung. □

Wir fassen zusammen: der sich durch Koordinatenwechsel ergebende Operator ist immerhin schon mal ein ΨDO, und wir haben eine Formel für seine Amplitudenfunktion.

Nun wollen wir die Symbole von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_1$ auseinander ermitteln. Sei $a = a(x,\xi) = \sigma_{\mathcal{A}}(x,\xi)$ das Symbol zu $\mathcal{A}$, also

$$(\mathcal{A}u)(x) = \iint_{\mathbb{R}^n_\xi \times \Omega} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} a(x,\xi) u(y) \, \mathrm{d}y \, đ\xi, \qquad x \in \Omega, \quad u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dann ist $\mathcal{A}_1$ ebenfalls ein ΨDO, und wegen (6.1), (6.2) hat er die Darstellung

$$(\mathcal{A}_1 u)(x) = \iint_{\mathbb{R}^n_\xi \times \Omega_1} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} a(\kappa_1(x), \psi(x,y)\xi) D(x,y) u(y) \, \mathrm{d}y \, đ\xi, \qquad x \in \Omega_1, \quad u \in C_0^\infty(\Omega_1),$$

wobei $D(x,y) = |\det \psi(x,y)| \cdot |\det \kappa_1'(y)|$. Wir können annehmen, daß $\mathcal{A}$ ein eigentlich getragener Operator ist. Wegen $\mathcal{A}_1 := (\kappa^*)^{-1} \circ \mathcal{A} \circ \kappa^*$ muß das dann auch für $\mathcal{A}_1$ gelten.

Nun bringen wir Satz 5.4 ins Spiel:

$$\sigma_{\mathcal{A}_1}(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \left(\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a_1(x,y,\xi) \right)\Big|_{y=x} .$$

Wir picken uns ein α heraus und schauen uns den entsprechenden Summanden genauer an:

$$\begin{aligned} &\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha \left(a(\kappa_1(x), \psi(x,y)\xi) D(x,y) \right)\Big|_{y=x} \\ &= \sum_{\alpha_1 \le \alpha} \binom{\alpha}{\alpha_1} \left(\partial_\xi^\alpha D_y^{\alpha_1} a(\kappa_1(x), \psi(x,y)\xi) \right)\Big|_{y=x} \cdot \left(D_y^{\alpha-\alpha_1} D(x,y) \right)\Big|_{y=x} \\ &= \sum_{\alpha_1 \le \alpha} \left(c_{\alpha\alpha_1}(x,y) \partial_\xi^\alpha D_y^{\alpha_1} a(\kappa_1(x), \psi(x,y)\xi) \right)\Big|_{y=x} \\ &= \left(\sum_{|\beta| \le 2|\alpha|,\ |\gamma|+|\alpha| \le |\beta|} c_{\alpha\beta\gamma}(x,y) \left(\partial_\eta^\beta a(\kappa_1(x),\eta) \right)\Big|_{\eta=\psi(x,y)\xi} \cdot \xi^\gamma \right)\Bigg|_{y=x} . \end{aligned}$$

Die Summationsgrenzen erklären sich wie folgt: es wirken maximal $2|\alpha|$ Ableitungen auf das hintere Argument von a. Und wenn man einen solchen Summanden ein weiteres Mal nach y differenziert, dann ändert sich $|\beta| - |\gamma|$ nicht. Wenn man stattdessen nach ξ differenziert, dann steigt $|\beta| - |\gamma|$ höchstens um eins. Insgesamt gibt es aber $|\alpha|$ Ableitungen nach ξ, also ist $|\beta| - |\gamma| \ge |\alpha|$.

Wir vermerken zur späteren Verwendung, daß

$$|\gamma| \le |\beta| - |\alpha| \le |\beta| - \frac{1}{2}|\beta| = \frac{1}{2}|\beta|.$$

Weiterhin vereinbaren wir eine Notation:

$$a^{(\beta)}(z,\zeta) := \partial_\zeta^\beta a(z,\zeta).$$

Dann haben wir gezeigt, daß

$$\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha \left(a(\kappa_1(x),\psi(x,y)\xi)D(x,y)\right)\big|_{y=x} = \sum_{|\beta|\le 2|\alpha|,\ |\gamma|+|\alpha|\le|\beta|} c_{\alpha\beta\gamma}(x,x)\xi^\gamma \cdot a^{(\beta)}(\kappa_1(x),\psi(x,x)\xi).$$

Das setzen wir jetzt in die asymptotische Reihe für $\sigma_{\mathcal{A}_1}$ ein, und wir fassen gleiche Werte von β zusammen:

$$\sigma_{\mathcal{A}_1}(x,\xi) \sim \sum_\beta \frac{1}{\beta!}\Psi_\beta(x,\xi)\cdot a^{(\beta)}(\kappa_1(x),\psi(x,x)\xi), \qquad x\in\Omega_1, \quad \xi\in\mathbb{R}^n.$$

Hierbei ist Ψ_β ein im Wesentlichen unbekanntes Polynom in ξ vom Grade höchstens gleich $\frac{1}{2}|\beta|$.

Wir schauen uns $\psi(x,x)$ aus (6.3) einmal genauer an, verwenden dabei $\Phi(x,y,\xi) = (\kappa_1(x)-\kappa_1(y))\xi$, und es folgt, daß

$$\psi(x,x) = \left(\kappa_1'(x)\right)^{-\top}.$$

Nun gehen wir von $x\in\Omega_1$ wieder zurück zu $x\in\Omega$, und es ergibt sich

$$\sigma_{\mathcal{A}_1}(\kappa(x),\xi) \sim \sum_\beta \frac{1}{\beta!}\Phi_\beta(x,\xi)\cdot a^{(\beta)}(x,(\kappa'(x))^\top\xi), \qquad x\in\Omega, \quad \xi\in\mathbb{R}^n, \tag{6.4}$$

wegen der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion im Argument von $a^{(\beta)}$. Hierbei sind die Φ_β wieder Polynome vom Grade $\le \frac{1}{2}|\beta|$ in der Variablen ξ, die wir gleich bestimmen werden. Man macht sich schnell klar, daß $\Phi_0\equiv 1$ ist.

Die entscheidende Idee bei der Bestimmung von Φ_β ist nun, daß diese Polynome nicht vom Operator $\mathcal{A}$ abhängen, sondern lediglich vom Diffeomorphismus κ. Wir können also annehmen, daß $\mathcal{A}$ sogar ein PDO wäre. Für solche Operatoren können wir fast zu Fuß ausrechnen, wie sie sich unter Koordinatenwechseln transformieren. Das vergleichen wir dann mit der vorigen Formel und können dann hoffentlich die Faktoren Φ_β direkt ablesen.

Aus dem ersten Teil von Satz 5.4 bekommen wir, wenn der ΨDO $\mathcal{A}_1$ auf die Variable $x_I\in\Omega_1$ wirkt, die Identität

$$\sigma_{\mathcal{A}_1}(x_I,\xi) = e^{-\mathrm{i}x_I\xi}\mathcal{A}_1 e^{\mathrm{i}x_I\xi}, \qquad \text{also} \qquad e^{\mathrm{i}x_I\xi}\cdot\sigma_{\mathcal{A}_1}(x_I,\xi) = \mathcal{A}_1 e^{\mathrm{i}x_I\xi}.$$

Zusammen mit $\kappa^*\circ\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}\circ\kappa^*$ und $x=\kappa^{-1}(x_I)\in\Omega$ ist dann

$$e^{\mathrm{i}\kappa(x)\xi}\cdot\sigma_{\mathcal{A}_1}(\kappa(x),\xi) = \mathcal{A}e^{\mathrm{i}\kappa(x)\xi},$$

wobei $\mathcal{A}$ auf die Variable $x\in\Omega$ wirkt.

Wenn wir vorübergehend $\mathcal{A}$ auf $z\in\Omega$ wirken lassen, haben wir

$$\sigma_{\mathcal{A}_1}(\kappa(x),\xi) = e^{-\mathrm{i}\kappa(x)\xi}\left(\mathcal{A}e^{\mathrm{i}\langle\kappa(z),\xi\rangle}\right)\Big|_{z=x}.$$

Nun haben wir die Taylorentwicklung

$$\kappa(z) = \kappa(x) + \kappa'(x)\cdot(z-x) + R_\kappa(x,z)$$

mit quadratischem Restglied R_κ, also

$$\begin{aligned}\langle\kappa(z),\xi\rangle &= \langle\kappa(x),\xi\rangle + \left\langle(z-x),(\kappa'(x))^\top\xi\right\rangle + \langle R_\kappa,\xi\rangle\\ &= \langle\kappa(x),\xi\rangle - \left\langle x,(\kappa'(x))^\top\xi\right\rangle + \left\langle z,(\kappa'(x))^\top\xi\right\rangle + \langle R_\kappa(x,z),\xi\rangle\,.\end{aligned}$$

Die ersten beiden hängen von z gar nicht ab, und wir setzen jetzt voraus, daß $\mathcal{A}$ ein PDO ist, der auf z wirkt. Dann haben wir

$$\sigma_{\mathcal{A}_1}(\kappa(x),\xi) = e^{-\mathrm{i}\left\langle x,(\kappa'(x))^\top\xi\right\rangle}\left(\mathcal{A}e^{\mathrm{i}\left\langle z,(\kappa'(x))^\top\xi\right\rangle}\cdot e^{\mathrm{i}\langle R_\kappa(x,z),\xi\rangle}\right)\Big|_{z=x}.$$

Die zwei Exponentialterme in der großen Klammer nennen wir v und w. Wenn nun $\mathcal{A}$ das Symbol $a(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ hat, dann ist wegen der Formel für die Komposition von ΨDO

$$\mathcal{A}(vw)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}x\xi}\tilde{a}_W(x,\xi)\hat{v}(\xi)\,đ\xi,$$

wobei

$$\tilde{a}_W(x,\xi) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\left(\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)\right)\left(D_x^\alpha w(x)\right).$$

Die Summe hat nur endlich viele Summanden $\neq 0$. Sei nun $\mathcal{A}^{(\alpha)}$ der Operator mit dem Symbol $a^{(\alpha)}(x,\xi) = \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)$, dann haben wir

$$\mathcal{A}(vw)(x) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\left(\mathcal{A}^{(\alpha)}(x,D_x)v(x)\right)D_x^\alpha w(x).$$

Wenn nun B ein PDO mit Symbol b ist, dann gilt $B(z,D_z)\exp(\mathrm{i}z\eta) = \exp(\mathrm{i}z\eta)b(z,\eta)$, sodaß insgesamt

$$\sigma_{\mathcal{A}_1}(\kappa(x),\xi) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}a^{(\alpha)}\left(x,(\kappa'(x))^\top\xi\right)\cdot\left(D_z^\alpha \exp(\mathrm{i}\,\langle R_\kappa(x,z),\xi\rangle)\right)\Big|_{z=x}$$

gilt. Wir haben nach einem Vergleich mit (6.4) also

$$\Phi_\beta(x,\xi) = \left(D_z^\beta \exp\left(\mathrm{i}\,\langle\kappa(z)-\kappa(x)-\kappa'(x)\cdot(z-x),\xi\rangle\right)\right)\Big|_{z=x},$$

was tatsächlich ein Polynom in der Variablen ξ vom Grade $\frac{1}{2}|\beta|$ darstellt. Einige Beispiele davon sind

$$\begin{aligned}
|\beta| = 0\colon &\qquad \Phi_\beta(x,\xi) = 1,\\
|\beta| = 1\colon &\qquad \Phi_\beta(x,\xi) = 0,\\
|\beta| = 2\colon &\qquad \Phi_\beta(x,\xi) = D_x^\beta\left(\mathrm{i}\kappa(x)\cdot\eta\right).
\end{aligned}$$

Wir schauen noch nach, ob in (6.4) tatsächlich asymptotisch summiert werden kann: es ist $a^{(\beta)} \in S^{m-\varrho|\beta|}_{\varrho,\delta}$ und $\Phi_\beta \in S^{|\beta|/2}_{1,0}$, also gehört der entsprechende Summand zur Symbolklasse $S^{m-\varrho|\beta|+|\beta|/2}_{\varrho,\delta}$. Und wegen $1-\varrho \le \delta < \varrho$ ist tatsächlich $\varrho > 1/2$, was das asymptotische Summieren ermöglicht.

Wir halten zum Abschluß noch fest, daß

$$\sigma_{\mathcal{A}^1}(\kappa(x),\xi) = \sigma_{\mathcal{A}}\left(x,(\kappa'(x))^\top\xi\right) \quad \bmod S^{m-2(\varrho-1/2)}_{\varrho,\delta}.$$

Wir tragen unsere Ergebnisse zusammen:

Satz 6.2. *Seien Ω und Ω_1 offene Mengen im $\mathbb{R}^n$, und sei*

$$\kappa\colon \Omega \to \Omega_1$$

ein Diffeomorphismus. Sei weiterhin κ^* der Pullback von Funktionen, der ein topologischer Isomorphismus

$$\kappa^*\colon \mathcal{D}(\Omega_1) \to \mathcal{D}(\Omega)$$

und auch

$$\kappa^*\colon \mathcal{E}(\Omega_1) \to \mathcal{E}(\Omega)$$

ist, definiert durch $\kappa^* u := u\circ\kappa$.

Sei $\mathcal{A} \in \Psi^\infty(\Omega)$ ein eigentlich getragener ΨDO auf Ω. Dann ist der Transfer $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}^\kappa$ von $\mathcal{A}$ zu Ω_1 mittels κ, also $\mathcal{A}_1 := (\kappa^*)^{-1}\circ\mathcal{A}\circ\kappa^*$, ein stetiger Operator

$$\mathcal{A}_1\colon \mathcal{E}(\Omega_1) \to \mathcal{E}(\Omega_1)$$

und auch

$$\mathcal{A}_1 : \mathcal{D}(\Omega_1) \to \mathcal{D}(\Omega_1);$$

er ist ein Ψ*DO auf* Ω_1 *und eigentlich getragen.*

Wenn $\mathcal{A} \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(\Omega)$ *ein klassischer Operator sein sollte, dann auch* $\mathcal{A}_1$*, und die Hauptsymbole* a_m *von* $\mathcal{A}$ *sowie* $a_{\kappa,m}$ *von* $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}^\kappa$ *transformieren sich gemäß*

$$a_{\kappa,m}(\kappa(x), \xi) = a_m\left(x, (\kappa'(x))^\top \xi\right), \qquad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Für klassische Ψ*DO ist also das Hauptsymbol invariant definiert auf dem Kotangentialbündel.*

Schließlich wollen wir uns noch verdeutlichen, wie man die Wirkung von ΨDOen auf Distributionen definiert, und wie solcherart definierte Operatoren sich bei Koordinatenwechsel transformieren.

Die zum Isomorphismus κ^* transponierte Abbildung (siehe Satz A.35) nennen wir κ_*, sie ist ein topologischer Isomorphismus zwischen Distributionenräumen, und wir haben auch (mit den Notationen aus dem Anhang) $((\kappa^*)^t)^{-1} = ((\kappa^*)^{-1})^t$, also $(\kappa_*)^{-1} = ((\kappa^{-1})^*)^t = (\kappa^{-1})_*$.

Der Operator $\mathcal{A}$ bildet stetig zwischen Räumen glatter Funktionen ab, also liefert uns Satz A.35 einen Operator $\mathcal{A}^t$, der stetig abbildet wie folgt:

$$\mathcal{A}^t : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega), \qquad \mathcal{A}^t : \mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{E}'(\Omega),$$

und wir haben $\langle \mathcal{A}^t u, \varphi \rangle := \langle u, \mathcal{A}\varphi \rangle$, wenn u eine Distribution ist und φ eine glatte Funktion (und eine von beiden einen kompakten Träger hat). Wenn nun zufälligerweise u eine glatte Funktion sein sollte, und wenn wir die von u erzeugte reguläre Distribution T_u mit u identifizieren, können wir (wie früher schon) zeigen, daß $\mathcal{A}^t$ wie ein ΨDO wirkt, und wir bekommen die Stetigkeit von $\mathcal{A}^t$ als Abbildung wie folgt:

$$\mathcal{A}^t : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega), \qquad \mathcal{A}^t : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathcal{E}(\Omega).$$

Man beachte, daß $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$ folgen-dicht liegt, und erst recht $\mathcal{E}$ in $\mathcal{E}'$.

Der Schwartz–Kern von $\mathcal{A}^t$ ist gleich dem Schwartz–Kern von $\mathcal{A}$ mit vertauschten Argumenten. Wenn wir jetzt $\mathcal{A}^t$ ein weiteres Mal transponieren, dann vertauschen sich die Argumente des Schwartz–Kerns erneut, wie bekommen wieder $\mathcal{A}$, bloß diesmal als Abbildung eines Distributionenraumes in sich.

Und der Transfer von Ω zu Ω_1 verläuft wie folgt: wir haben

$$\mathcal{A}_1 = (\kappa^*)^{-1} \circ \mathcal{A} \circ \kappa^*.$$

Transponieren liefert dann

$$\mathcal{A}_1^t = (\kappa^*)^t \circ \mathcal{A}^t \circ ((\kappa^*)^{-1})^t = \kappa_* \circ \mathcal{A}^t \circ (\kappa_*)^{-1}.$$

Nun bilden $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}^t$ zwischen denselben Räumen ab, und für $\mathcal{A}_1$, $(\mathcal{A}_1)^t$ gilt entsprechendes, also können wir dieselbe Argumentation wiederholen für die transponierten Operatoren, und es ergibt sich

$$\mathcal{A}_1 = \kappa_* \circ \mathcal{A} \circ (\kappa_*)^{-1} : \mathcal{D}'(\Omega_1) \to \mathcal{D}'(\Omega_1).$$

Dazu gehört das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}'(\Omega) & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \mathcal{D}'(\Omega) \\
\downarrow{\scriptstyle \kappa_*} & & \downarrow{\scriptstyle \kappa_*} \\
\mathcal{D}'(\Omega_1) & \xrightarrow{\mathcal{A}_1} & \mathcal{D}'(\Omega_1).
\end{array}$$

Analog für $\mathcal{E}'$ statt $\mathcal{D}'$ überall. Wir betonen, daß der transformierte Operator $\mathcal{A}_1$ auf Funktionen (anstatt Distributionen) anders definiert ist, nämlich als $\mathcal{A}_1 = (\kappa^*)^{-1} \circ \mathcal{A} \circ \kappa^* : \mathcal{D}(\Omega_1) \to \mathcal{D}(\Omega_1)$.

6.2 Distributionen, Dichten und Distributionendichten

Zu welchem Zweck haben wir eigentlich Distributionen eingeführt ?

Wir wollten den klassischen Funktionenbegriff verallgemeinern, und insbesondere wollten wir dabei Objekte bekommen, die man immer beliebig oft differenzieren kann. Einen sinnvollen und leistungsfähigen Limesbegriff wollten wir für diese Objekte ebenfalls haben. Und wir wollten weiterhin solche speziellen Abbildungen wie DIRACs Delta erfassen.

Unser Weg zum Distributionenraum $\mathcal{D}'(\Omega)$ war im Falle einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ der folgende:

1. definiere $C_0^\infty(\Omega)$ als Menge
2. definiere Konvergenz von Folgen im $C_0^\infty(\Omega)$
3. definiere eine Topologie, die zu dieser Folgenkonvergenz paßt (diesen Schritt haben wir uns nicht angeschaut. Auf jeden Fall bekommt man einen lokalkonvexen topologischen Vektorraum $\mathcal{D}(\Omega)$. Dieser ist zwar kein Fréchet-Raum, aber die Begriffe *stetig* und *folgen–stetig* sind trotzdem hier äquivalent. Einzelheiten zur Topologie von $\mathcal{D}(\Omega)$ finden sich z.B. in [14].)
4. definiere $\mathcal{D}'(\Omega)$ als topologischen Dual zum $\mathcal{D}(\Omega)$
5. jeder Funktion $f \in C(\Omega)$ ordnen wir eine Distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ zu gemäß

$$\langle T_f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)} := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

6. die Abbildung $f \mapsto T_f$ weist man als injektiv nach.

Damit hat man erreicht:

- Distributionen sind Elemente eines Dualraumes eines Funktionenraumes
- stetige Funktionen (sogar aus dem $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$) lassen sich im Distributionenraum wiederfinden.

Nun versuchen wir, dieses Verfahren zu kopieren im Falle einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$. Diese ist zunächst nur ein Hausdorffraum zusammen mit einem Atlas.

Die obigen Schritte 1,2,3,4 sind analog mit $\mathcal{M}$ anstatt Ω durchführbar, aber anschließend stecken wir fest: wenn $f \in C(\mathcal{M})$ gegeben ist, wissen wir nicht, welches Element des Dualraumes $(C_0^\infty(\mathcal{M}))'$ diesem f entspricht, weil die Funktion $x \mapsto f(x)\varphi(x)$ mit $x \in \mathcal{M}$ erst dann integriert werden kann, wenn man auf $\mathcal{M}$ z.B. ein Lebesgue–Maß oder eine Volumenform festgelegt hat, und das wollen wir nicht (immer).

Wenn wir f und φ beide als Funktionen haben wollen, gibt es keinen Integralbegriff !

Wir können also nicht alles zugleich haben. Als Ausweg könnte man darauf verzichten, Integrale auswerten zu wollen. Oder man interpretiert einen der beiden Faktoren f und φ nicht als Funktion, sondern z.B. als (Funktionen)dichte oder Distributionendichte (was weiter unten erklärt wird).

Wir tragen im Folgenden einige Methoden zusammen, aus dieser Situation herauszukommen.

Die Mannigfaltigkeit heiße jeweils $\mathcal{M}$, überdeckt von offenen Mengen Ω_j, die durch Kartenabbildungen κ_j in offene Teilmengen $\tilde{\Omega}_j$ des $\mathbb{R}^n$ abgebildet werden.

Methode 1: (siehe Definition 2.37 und auch [8, Kapitel 6.3])

Zu Diffeomorphismen ψ zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definieren wir einen Pullback ψ^* von Distributionen wie in (2.6), nicht zu verwechseln mit dem Pullback von Funktionen.

Dann definieren wir: eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$ sei eine Familie von Distributionen $u_{\kappa_j} \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega}_j)$, die sich gemäß $u_{\kappa_2} = (\kappa_1\kappa_2^{-1})^* u_{\kappa_1}$ umrechnen, falls $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$.

Wenn $u \in C(\mathcal{M})$ sein sollte, dann entspricht diesem u die Familie von Distributionen $T_{u_j} \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega}_j)$, für die $u_j := u\circ\kappa_j^{-1}$ ist. Diese Abbildung von u auf eine solche Familie von Distributionen ist injektiv. Damit ist es uns gelungen, stetige Funktionen im Raum der Distributionen wiederzufinden.

Und wir können mit dieser Definition sogar etwas arbeiten: Im Abschnitt 2.6 wurde vorgeführt, wie man PDOen auf $\mathcal{M}$ so interpretiert, daß sie $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$ stetig nach $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$ abbilden, und zwar so, daß das übliche Verhalten sich ergibt, wenn u eine glatte Funktion sein sollte.

Bei diesem Zugang verzichtet man darauf, Distributionen als Elemente eines Dualraumes von (wem auch immer) zu interpretieren. Es wird auch nicht auf $\mathcal{M}$ integriert.

Methode 2: (siehe [6, Kapitel 3.1])

Wir definieren $A_0^q(\mathbb{R}^n)$ als den Raum der C^∞ q–Formen auf dem $\mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger. Die Topologie des $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ übertragen wir komponentenweise und erhalten so eine Topologie auf dem $A_0^q(\mathbb{R}^n)$.

Dann betrachten wir den topologischen Dual $(A_0^{n-q}(\mathbb{R}^n))'$ und nennen ihn den *Raum der Ströme vom Grad* q, wofür wir $(\mathcal{D}')^q(\mathbb{R}^n)$ schreiben.

Ein typischer Fall ist $q = 0$. Dann erhalten wir Ströme vom Grad 0; diese sind dual zu den n–Formen des $\mathbb{R}^n$. Diese Begriffsbildung läßt sich auf offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ einschränken, und anschließend lassen sich auch Mannigfaltigkeiten der Dimension n betrachten.

Methode 3: siehe Bemerkung 2.39.

Methode 4: (siehe [8, Kapitel 6.3])

Wir bestimmen die Elemente des Duals zum $C_0^\infty(\mathcal{M})$, bis auf Isomorphie:

Sei $u \in (C_0^\infty(\mathcal{M}))'$. Dann erzeugt u eine Distribution $u_{\kappa_j} \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega}_j)$ gemäß

$$\left\langle u_{\kappa_j}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(\tilde{\Omega}_j)\times\mathcal{D}(\tilde{\Omega}_j)} := \left\langle u, \varphi\circ\kappa_j \right\rangle_{(C_0^\infty(\mathcal{M}))'\times C_0^\infty(\mathcal{M})}, \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\tilde{\Omega}_j).$$

Wenn nun sogar $\operatorname{supp}\varphi \subset \kappa_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ sein sollte, dann bekommen wir

$$\begin{aligned}\langle u_{\kappa_2}, \varphi\rangle &= \langle u, \varphi\circ\kappa_2\rangle = \left\langle u, \varphi\circ(\kappa_2\kappa_1^{-1})\circ\kappa_1\right\rangle = \left\langle u_{\kappa_1}, \varphi\circ(\kappa_2\kappa_1^{-1})\right\rangle = \left\langle u_{\kappa_1}, (\kappa_2\kappa_1^{-1})^*\varphi\right\rangle \\ &= \left\langle (\kappa_2\kappa_1^{-1})_* u_{\kappa_1}, \varphi\right\rangle,\end{aligned}$$

und somit ist dann

$$u_{\kappa_2} = (\kappa_2\kappa_1^{-1})_* u_{\kappa_1} \qquad \text{in} \qquad \kappa_2(\Omega_1\cap\Omega_2).$$

In dieser Notation bezeichnet ψ_* die adjungierte Abbildung zum Pullback ψ^* von Funktionen.

Mit dem Pullback von Distributionen können wir dies auch schreiben als

$$u_{\kappa_2} = \left|\det(\kappa_1\kappa_2^{-1})'\right| (\kappa_1\kappa_2^{-1})^* u_{\kappa_1}. \tag{6.5}$$

Im Vergleich zur Methode 1 ist jetzt der Determinantenfaktor hinzugekommen.

Und wieder können wir die Elemente des $(C_0^\infty(\mathcal{M}))'$ identifizieren mit Familien von Distributionen u_{κ_j} aus $\mathcal{D}'(\tilde{\Omega}_j)$, die sich gemäß dieser Formel ineinander umrechnen lassen. Die so definierten Objekte nennen wir dann *Distributionendichten.*

Sei $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$ eine Distribution wie definiert in Methode 1, und sei Φ eine Dichte, dann heißt $u\Phi$ eine *Distributionendichte.*

Wenn eine Dichte Φ fixiert wird mit $0 < \varepsilon \le \Phi \le \varepsilon^{-1}$ überall, dann kann man Distributionen und Distributionendichten miteinander identifizieren. Dieser Fall liegt zum Beispiel bei Riemannschen Mannigfaltigkeiten vor.

Wir entscheiden uns jetzt (und für den Rest der Vorlesung, es sei denn es läge eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer Volumenform vor) für eine formalere Betrachtung, und dabei folgen wir [14].

Sei V ein Vektorraum der Dimension n mit einer Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$, und sei V^* der Dualraum mit der dualen Basis $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$, also $\left\langle v_j^*, v_k\right\rangle = \delta_{jk}$. Sei $\Lambda^n V^*$ der Raum der externen n–Formen auf V. Dann ist bekanntlich $\dim \Lambda^n V^* = 1$, und wir haben das Basiselement $\omega = v_1^* \wedge \ldots \wedge v_n^*$.

Definition 6.3 (α–Dichte). *Eine Abbildung $\delta\colon \Lambda^n V^* \setminus 0 \to \mathbb{C}$ heißt* α–Dichte *auf V wenn*

$$\delta(sw) = |s|^\alpha \delta(w), \qquad \forall s \in \mathbb{R}\setminus 0, \quad \forall w \in \Lambda^n V^* \setminus 0.$$

Die Menge aller α–Dichten auf V schreiben wir als $\Omega^\alpha V$.

Bevorzugterweise werden wir später $\alpha = 0, \frac{1}{2}, 1$ haben.

Eine solche Dichte δ ist eindeutig festgelegt durch den Wert auf ω, denn sei $w \in \Lambda^n V^* \setminus 0$, dann gibt es ein genau $c \in \mathbb{R}$ mit $w = c\omega$, und dann ist $\delta(w) = |c|^\alpha \delta(\omega)$.

Wir beobachten, daß $\Omega^\alpha V$ ein $\mathbb{C}$–Vektorraum der Dimension 1 ist. Denn sei δ_α diejenige Dichte, für die $\delta_\alpha(\omega) = 1$ ist, und sei δ irgendeine andere α–Dichte mit $\delta(\omega) = c$, wobei $c \in \mathbb{C}$. Sei nun $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine weitere Basis für V, dann existiert eine Matrix A mit $e_i = \sum_j a_{ij} v_j$. Dann haben wir

$$\delta(e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*) = |\det A|^\alpha \delta(\omega) = |\det A|^\alpha c\delta_\alpha(\omega) = c\delta_\alpha(e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*),$$

also ist $\delta = c\delta_\alpha$ unabhängig von der gewählten Basis im Raum V.

Ab jetzt sei $\mathcal{M}$ eine glatte orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n, und $T_p\mathcal{M}$ sei der Tangentialraum an $p \in \mathcal{M}$. Dann ist $\Omega^\alpha T_p\mathcal{M}$ ein komplexer Vektorraum der Dimension 1. Sei (U, κ) eine Karte für $\mathcal{M}$ mit der Darstellung

$$\kappa(p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p)), \quad p \in U \subset \mathcal{M}.$$

Dann definieren wir eine α–Dichte auf U als diejenige Dichte, die den Wert 1 auf $\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$ annimmt; und für diese Dichte schreiben wir

$$|\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n|^\alpha .$$

Dieses Element verschafft uns dann eine Basis für jede Faser von $(\Omega^\alpha\mathcal{M})_{|U}$.

Sei nun (V, λ) eine weitere Karte von $\mathcal{M}$ mit lokalen Koordinaten $\lambda(p) = (y_1(p), \ldots, y_n(p))$ für $p \in V \subset \mathcal{M}$, und sei $U \cap V \neq \emptyset$. Dann haben wir

$$|\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n|^\alpha_{|U\cap V} = \left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right|^\alpha \cdot |\,\mathrm{d}y_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y_n|^\alpha_{|U\cap V},$$

und wir stellen fest, daß es in $\Omega^\alpha\mathcal{M}$ globale glatte Schnitte ($\neq 0$) gibt.

Einen Schnitt s von $\Omega^\alpha\mathcal{M}$, der in lokalen Koordinaten die Gestalt $s = s(x)|\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n|^\alpha$ hat, mit $s = s(x) \in C^k(\mathcal{M})$, heißt C^k–Schnitt von $\Omega^\alpha\mathcal{M}$. Für den Raum aller dieser Schnitte schreiben wir dann $C^k(\mathcal{M}; \Omega^\alpha\mathcal{M})$. Analog definieren wir $C_0^k(\mathcal{M}; \Omega^\alpha\mathcal{M})$ als den Raum der C^k–Schnitte mit kompaktem Träger.

Wenn nun E ein Vektorbündel über $\mathcal{M}$ ist, dann definieren wir $C^k_{(0)}(\mathcal{M}; E \otimes \Omega^\alpha\mathcal{M})$ durch Tensorproduktbildung mit dem entsprechenden Raum der Schnitte.

Satz 6.4. *Die Bündel $\Omega^\alpha\mathcal{M}$ haben die folgenden Eigenschaften:*

1. $\Omega^0\mathcal{M} \cong \mathcal{M} \times \mathbb{C}$
2. $\Omega^\alpha\mathcal{M} \otimes \Omega^\beta\mathcal{M} \cong \Omega^{\alpha+\beta}\mathcal{M}$
3. $(\Omega^\alpha\mathcal{M})^* \cong \Omega^{-\alpha}\mathcal{M}$.

Beweis. 1. Jedes Element von $\Omega^0 T_p\mathcal{M}$ nimmt auf $\Lambda^n T_p\mathcal{M}$ überall den gleichen Wert an.

2. Aus der Definition heraus ist $\Omega^\alpha T_p\mathcal{M} \otimes \Omega^\beta T_p\mathcal{M}$ isomorph zum Raum der endlichen Linearkombinationen von formalen Produkten, deren erster Faktor aus $\Omega^\alpha T_p\mathcal{M}$ stammt, und der zweite aus $\Omega^\beta T_p\mathcal{M}$.

3. Folgt aus den ersten beiden Aussagen.

□

Insbesondere können wir $\Omega^0\mathcal{M}$ mit dem Raum der glatten Funktionen auf $\mathcal{M}$ identifizieren.

Jetzt schauen wir uns den Fall $\alpha = 1$ ein, sei also $\delta \in C_0^0(\mathcal{M}; \Omega^1\mathcal{M})$ und $\operatorname{supp}\delta \Subset U$, wobei U ein beschränktes Kartengebiet zur Kartenabbildung κ sei, mit $\kappa(p) = (x_1(p), \ldots, x_n(p))$. Dann hat δ die Darstellung $\delta = \delta(x)|\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n|$. Wir können dann

$$\int_U \delta := \int_{\kappa(U)} \delta(\kappa^{-1}(x))\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$$

definieren, wobei rechts ein Lebesgue-Integral im $\mathbb{R}^n$ steht (wir nehmen an, daß $\kappa(U)$ eine beschränkte Menge des $\mathbb{R}^n$ ist). Nach unseren Transformationsregeln für Dichten beim Kartenwechsel ist dann $\int_U \delta$ unabhängig von der gewählten Kartenabbildung κ.

Wenn nun $\delta_1 \in \Omega^\alpha\mathcal{M}$ und $\delta_2 \in \Omega^{1-\alpha}\mathcal{M}$ ist und eine von beiden Dichten einen kompakten Träger hat, dann ist $\delta_1\delta_2 \in \Omega^1\mathcal{M}$ eine Dichte mit kompaktem Träger, und die Integration $\int_\mathcal{M} \delta_1\delta_2$ ist invariant definierbar.

Für meßbare 1–Dichten δ mit kompaktem Träger können wir das Integral $\int_\mathcal{M} |\delta|$ untersuchen, und falls dies einen endlichen Wert ergeben sollte, reden wir von L^1–Schnitten mit kompaktem Träger und deren Norm $\|\delta\| = \int_\mathcal{M} |\delta|$. Die Vervollständigung der Menge dieser Schnitte in dieser Norm liefert uns dann den Raum $L^1(\mathcal{M}; \Omega^1\mathcal{M})$. Falls die Mannigfaltigkeit kompakt sein sollte, bewirkt diese Vervollständigung natürlich keine Änderung.

Wir sagen, daß $\delta \in L^2(\mathcal{M}; \Omega^{1/2}\mathcal{M})$ ist, genau dann wenn $|\delta|^2 \in L^1(\mathcal{M}; \Omega^1\mathcal{M})$, und dies ist ein Hilbertraum mit dem natürlichen Skalarprodukt

$$\langle \delta_1, \delta_2\rangle := \int_\mathcal{M} \delta_1\overline{\delta_2}.$$

Weiterhin definieren wir Distributionenräume:

$$\mathcal{D}'(\mathcal{M}; \Omega^\alpha\mathcal{M}) := \left(C_0^\infty(\mathcal{M}; \Omega^{1-\alpha}\mathcal{M})\right)',$$

wobei rechts der topologische Dual steht. Für $\alpha = 0$ bekommen wir links einen Raum, den wir $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$ nennen. Falls diese Distributionen einen kompakten Träger haben sollten, schreiben wir auch $\mathcal{E}'$ statt $\mathcal{D}'$.

Falls noch ein Vektorbündel E anwesend sein sollte, mit dualem Bündel E^*, führen wir die Räume

$$L^1(\mathcal{M}; E \otimes \Omega^1\mathcal{M}), \qquad L^2(\mathcal{M}; E \otimes \Omega^{1/2}\mathcal{M}), \qquad \mathcal{D}'(\mathcal{M}; E \otimes \Omega^\alpha\mathcal{M}) := (C_0^\infty(\mathcal{M}; E^* \otimes \Omega^{1-\alpha}\mathcal{M}))'$$

in natürlicher Weise ein.

Mit diesen Begriffsbildungen können wir eine weitere Fassung des Schwartz–Kern–Theorems formulieren:

Satz 6.5. *Seien $\mathcal{M}_x$ und $\mathcal{M}_y$ glatte Mannigfaltigkeiten, und sei $\mathcal{A}\colon C_0^\infty(\mathcal{M}_y) \to \mathcal{D}'(\mathcal{M}_x)$ linear und stetig. Dann gibt es genau eine Kern–Distribution*

$$A \in \mathcal{D}'(\mathcal{M}_x \times \mathcal{M}_y; \Pi_y^*\Omega^1\mathcal{M}_y),$$

wobei $\Pi_y\colon (x, y) \mapsto y$ die kanonische Projektion ist und Π_y^* der Pullback davon, sodaß für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathcal{M}_y)$ und $\psi \in C_0^\infty(\mathcal{M}_x; \Omega^1\mathcal{M}_x)$ gilt:

$$\langle \mathcal{A}\varphi, \psi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{M}_x)\times C_0^\infty(\mathcal{M}_x;\Omega^1\mathcal{M}_x)} = \langle A, \psi \otimes \varphi\rangle_{\dots}.$$

Wenn $\mathcal{A}$ ein glättender Operator sein sollte, ist $A \in C^\infty(\mathcal{M}_x \times \mathcal{M}_y; \Pi_y^*\Omega^1\mathcal{M}_y)$.

Siehe auch [14]. Wir werden uns noch eine weitere Version verschaffen, bei der die Variablen x und y etwas symmetrischer behandelt werden.

Jetzt können wir ΨDO auf Mannigfaltigkeiten definieren:

Definition 6.6 (ΨDO auf Mannigfaltigkeiten für glatte Funktionen). *Ein linearer und stetiger Operator $\mathcal{A}\colon C_0^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$ heißt* ΨDO der Ordnung m auf der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$, *wenn gilt: zu jeder Karte (U, κ) mit $\kappa(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p)) \in \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{U} = \kappa(U)$, und zu allen φ, $\psi \in C_0^\infty(\tilde{U})$ ist die Abbildung*

$$u \mapsto \varphi \cdot (\kappa^{-1})^*\mathcal{A}\kappa^*(\psi \cdot u), \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

ein ΨDO aus dem $\Psi^m(\mathbb{R}^n)$. Dann schreiben wir $\mathcal{A} \in \Psi^m(\mathcal{M})$.

Wir haben dann insgesamt die Abbildungskette

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\psi} C_0^\infty(\tilde{U}) \xrightarrow{\kappa^*} C_0^\infty(U) \xrightarrow{\mathcal{A}} C^\infty(\mathcal{M}) \xrightarrow{(\kappa^{-1})^*} C^\infty(\tilde{U}) \xrightarrow{\varphi} C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Folgerung 6.7. *Seien $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathcal{M})$ mit getrennten Trägern, und $\mathcal{A}$ ein ΨDO auf $\mathcal{M}$. Dann ist der Operator $u \mapsto \psi\mathcal{A}(\varphi u)$ ein glättender Operator.*

Beweis. Die Verkleinerung eines Kartengebiets ergibt wieder ein Kartengebiet, und die Vereinigung zweier voneinander getrennt liegender Kartengebiete ergibt auch ein Kartengebiet, weil die jeweiligen Kartenabbildungen sich nicht stören (beachte dabei, daß Kartengebiete nicht zusammenhängend sein müssen). Wenn man mittels Partition der Eins die Funktionen φ und ψ lokalfinit zerlegt in Funktionen kleineren Trägers, erhält man nur Summanden der Form $\psi_k \mathcal{A} \circ \varphi_j$, wobei ψ_k und φ_j auf demselben Kartengebiet leben, aber nach Voraussetzung getrennte Träger haben. □

In lokalen Koordinaten ist $\mathcal{A}$ also ein ΨDO mit Symbol $a = a(x, \xi) \in S^m$ plus einem Operator mit glättendem Integralkern.

Definition 6.8 (Symbole auf Mannigfaltigkeiten). *Sei $\mathcal{M}$ eine glatte Mannigfaltigkeit,* $\dim \mathcal{M} = n$. *Wir sagen, daß $a \in S^m(T^*\mathcal{M})$, wenn $a \in C^\infty(T^*\mathcal{M})$, und wenn der Pullback von a zu $\tilde{U} \times \mathbb{R}^n$ in $S^m(\tilde{U} \times \mathbb{R}^n)$ liegt, für jedes Kartengebiet U.*

Bei der Beschreibung der Wirkung von ΨDOn in lokalen Koordinaten geht man wie folgt vor: Wir überdecken $\mathcal{M}$ lokalfinit mit Kartengebieten U_j und wählen Funktionen φ_j und ψ_j mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{cases} \varphi_j \in C_0^\infty(\mathcal{M}), \\ \operatorname{supp} \varphi_j \Subset U_j, \\ \varphi_j(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{M}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x) = 1, \quad \forall x \in \mathcal{M}, \\ \psi_j \in C_0^\infty(\mathcal{M}), \\ \operatorname{supp} \psi_j \Subset U_j, \\ \psi_j \equiv 1 \quad \text{auf einer Umgebung von} \quad \operatorname{supp} \varphi_j. \end{cases} \tag{6.6}$$

Dann haben wir für $\mathcal{A} \in \Psi^m(\mathcal{M})$ offensichtlich

$$\mathcal{A}u = \sum_{j=1}^\infty \psi_j \mathcal{A}(\varphi_j u) + \sum_{j=1}^\infty (1 - \psi_j)\mathcal{A}(\varphi_j u). \tag{6.7}$$

Die Terme in der ersten Reihe können wir in Karten herunterziehen, und die Terme der zweiten Reihe verwirklichen glättende Operatoren.

Wir können ΨDOn auch für Vektorbündel definieren:

Definition 6.9 (ΨDO auf Mannigfaltigkeiten für Bündel). *Seien E und F komplexe Vektorbündel über $\mathcal{M}$, die auf dem Kartengebiet $U \subset \mathcal{M}$ trivialisiert werden mittels*

$$\phi_E \colon E_{|U} \to U \times \mathbb{C}^e, \qquad \phi_F \colon F_{|U} \to U \times \mathbb{C}^f.$$

Sei $\mathcal{A} \colon C_0^\infty(\mathcal{M}; E) \to C^\infty(\mathcal{M}; F)$ linear und stetig als Abbildung von E-Schnitten zu F-Schnitten.

Dann heißt $\mathcal{A}$ ein ΨDO der Ordnung m auf $\mathcal{M}$, *wenn es eine $f \times e$–Matrix von ΨDO $\mathcal{A}_{ij} \in \Psi^m(\mathcal{M})$ gibt mit*

$$\Big(\phi_F(\mathcal{A}u)_{|U}\Big)_i = \sum_j \mathcal{A}_{ij}(\phi_E u)_j, \qquad \forall u \in C_0^\infty(U; E).$$

Wir schreiben dann $\mathcal{A} \in \Psi^m(\mathcal{M}; E, F)$.

Für E und F wählen wir jetzt $\Omega^\alpha\mathcal{M}$ für geeignete $\alpha \in [0, 1]$:

Nach Definition ist $\mathcal{D}'(\mathcal{M}; \Omega^\alpha\mathcal{M})$ gleich dem Dual von $C_0^\infty(\mathcal{M}; \Omega^{1-\alpha}\mathcal{M})$.

Wenn nun $\mathcal{A} \colon C_0^\infty(\mathcal{M}; \Omega^{1-\alpha}\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M}; \Omega^{1-\alpha}\mathcal{M})$ linear und stetig abbildet, dann ist auch $\mathcal{A}^t \colon \mathcal{E}'(\mathcal{M}; \Omega^\alpha\mathcal{M}) \to \mathcal{D}'(\mathcal{M}; \Omega^\alpha\mathcal{M})$, und für den Fall von $\mathcal{A} \in \Psi^m(\mathcal{M}; \Omega^{1-\alpha}\mathcal{M}; \Omega^{1-\alpha}\mathcal{M})$ haben wir auch $\mathcal{A}^t \in \Psi^m(\mathcal{M}; \Omega^\alpha\mathcal{M}; \Omega^\alpha\mathcal{M})$ sowie

$$\langle \mathcal{A}u, v \rangle = \langle u, \mathcal{A}^t v \rangle, \qquad \forall u \in C_0^\infty(\mathcal{M}; \Omega^{1-\alpha}\mathcal{M}), \quad v \in C_0^\infty(\mathcal{M}; \Omega^\alpha\mathcal{M}).$$

Diese Gleichung nehmen wir als Definition der Wirkung von $\mathcal{A} \in \Psi^m(\mathcal{M};\Omega^{1-\alpha}\mathcal{M};\Omega^{1-\alpha}\mathcal{M})$ auf $u \in \mathcal{E}'(\mathcal{M};\Omega^{1-\alpha}\mathcal{M})$ (die linke Seite wird durch die rechte definiert). Von besonderem Interesse sind für uns dabei die Fälle $\alpha = 0, \frac{1}{2}, 1$.

Nun wollen wir der Frage nachgehen, wie sich die lokalisierten Darstellungen von ΨDOn transformieren beim Kartenwechsel. Seien U_1 und U_2 Kartengebiete auf $\mathcal{M}$ mit nichtleerem Durchschnitt, mit dazugehörigen Kartenabbildungen κ_1 und κ_2, und mit lokalen Koordinaten $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$. Auf $U_1 \cap U_2$ rechnen sich die Dichten um gemäß

$$\left| \mathrm{d}x_1^{(1)} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n^{(1)} \right|^\alpha = \left| \det \left(\frac{\partial x^{(1)}}{\partial x^{(2)}} \right) \right|^\alpha \cdot \left| \mathrm{d}x_1^{(2)} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n^{(2)} \right|^\alpha,$$

und $x^{(1)} = \psi(x^{(2)})$ mit $\psi = \kappa_1 \circ \kappa_2^{-1}$, also

$$|\det(\ldots)|^\alpha = |\det \psi'(x^{(2)})|^\alpha.$$

Sei nun $u \in C_0^\infty(\mathcal{M};\Omega^{1/2}\mathcal{M})$, d.h. u ist ein glatter Schnitt vom Bündel $\Omega^{1/2}\mathcal{M}$, also

$$u = u^{(j)}(x^{(j)}) \left| \mathrm{d}x_1^{(j)} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n^{(j)} \right|^{1/2}, \qquad j = 1, 2.$$

Ein Vergleich dieser beiden Darstellungen für u liefert dann

$$u^{(2)}(x^{(2)}) = u^{(1)} \left(\psi(x^{(2)}) \right) \cdot |\det \psi'(x^{(2)})|^{1/2},$$

also

$$u^{(2)} = \left(u^{(1)} \circ \psi \right) \cdot |\det \psi'|^{1/2} = \left| \det(\kappa_1 \kappa_2^{-1})' \right|^{1/2} \left(\kappa_1 \kappa_2^{-1} \right)^* u^{(1)}.$$

Man vergleiche dies mit (6.5).

Der Operator $\mathcal{A}$ bildet von $C_0^\infty(\mathcal{M};\Omega^{1/2}\mathcal{M})$ nach $C^\infty(\mathcal{M};\Omega^{1/2}\mathcal{M})$ ab. Wir schränken nun auf $U_1 \cap U_2$ ein, sei also $u \in C_0^\infty(U_1 \cap U_2)$. Die in lokalen Koordinaten geschriebenen Versionen von $\mathcal{A}$ nennen wir $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$, das sind ΨDOn in offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

Nun haben wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
C_0^\infty(\kappa_2(U_1 \cap U_2)) & \xrightarrow{\mathcal{A}_2} & C^\infty(\kappa_2(U_1 \cap U_2)) \\
\uparrow \psi^* & & \uparrow \psi^* \\
C_0^\infty(\kappa_1(U_1 \cap U_2)) & \xrightarrow{\mathcal{A}_1} & C^\infty(\kappa_1(U_1 \cap U_2)).
\end{array}$$

Es sei $u^{(1)}$ ein Element der Ecke links unten. Dann bekommen wir die Transformationsregel

$$\left(\left(\mathcal{A}_1 u^{(1)} \right) \circ \psi \right) |\det \psi'|^{1/2} = \mathcal{A}_2 \left((u^{(1)} \circ \psi) |\det \psi'|^{1/2} \right).$$

Wir setzen $v = u^{(1)} \circ \psi$ und interessieren uns für $\mathcal{A}_2(v|\det \psi'|^{1/2})$. Dies interpretieren wir als (auf v wirkende) Komposition zweier Pseudos, für die wir das pseudodifferentielle Symbol

$$\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} a_2^{(\alpha)}(x,\xi) D_x^\alpha |\det \psi'(x)|^{1/2}$$

finden. Für $\alpha = 0$ bekommen wir gerade $a_2(x,\xi)|\det \psi'(x)|^{1/2}$, aber eine halbe Potenz der Determinante haben wir auch auf der linken Seite. Also sind die Hauptsymbole auch invariant definiert auf dem Kotangentialbündel (wie es auch sein soll).

Und für $|\alpha| = 1$ bekommen wir in der asymptotischen Entwicklung den folgenden Summanden:

$$\sum_{j=1}^n \left(\partial_{\xi_j} a_2(x,\xi) \right) \cdot \frac{1}{2\mathrm{i}} \frac{\partial_{x_j} |\det \psi'|}{|\det \psi'|^{1/2}}.$$

Daraus ergibt sich nach einiger Rechnung ein weiterer Vorteil der Halbdichten: wenn man ΨDO operieren läßt auf Halbdichten (anstatt Funktionen), dann ist auch das *subprincipal symbol* aus der Hausaufgabe invariant auf ganz $T^*\mathcal{M}$ definiert. Für die Einzelheiten verweisen wir auf [8, Theorem 18.1.33].

Schließlich formulieren wir (ein letztes Mal) ein Schwartz–Kern–Theorem:

Satz 6.10 (Kern-Theorem von Schwartz). *Seien $\mathcal{M}_x$ und $\mathcal{M}_y$ glatte Mannigfaltigkeiten mit Vektorbündeln E und F darauf. Sei $\mathcal{A}\colon C_0^\infty(\mathcal{M}_y; F\otimes\Omega^{1/2}\mathcal{M}_y) \to \mathcal{D}'(\mathcal{M}_x; E\otimes\Omega^{1/2}\mathcal{M}_x)$ linear und stetig. Dann existiert genau eine Distribution*

$$A \in \mathcal{D}'\left(\mathcal{M}_x\times\mathcal{M}_y; \mathrm{Hom}(E,F)\otimes\Omega^{1/2}(\mathcal{M}_x\times\mathcal{M}_y)\right)$$

mit $\langle\mathcal{A}\varphi,\psi\rangle = \langle A,\psi\otimes\varphi\rangle$, wobei $\mathrm{Hom}(E,F)_{x,y}$ der Raum der linearen Abbildungen von der Faser E_x zur Faser F_y ist.

Für Einzelheiten verweisen wir wieder auf [8, Kapitel 18.1].

6.3 Elliptische Operatoren und Sobolevräume

Für $s\in\mathbb{R}$ definieren wir den Sobolevraum $H^s(\mathbb{R}^n)$ als die Menge aller Distributionen[1] u aus $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, für die $\hat{u}$ eine Funktion ist mit $\xi\mapsto\langle\xi\rangle^s\,\hat{u}(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^n_\xi)$. Die Norm ist dann definiert als

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} := \|\langle\xi\rangle^s\,\hat{u}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n_\xi)}\,.$$

Offensichtlich ist $\langle D\rangle^s$ ein Norm–Isomorphismus von $H^{t+s}(\mathbb{R}^n)$ auf $H^t(\mathbb{R}^n)$, für alle $t,s\in\mathbb{R}$.

Ein Blick auf die Fourier-Darstellung verrät, daß der Dual zum $H^s(\mathbb{R}^n)$ kanonisch isomorph ist zum $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. Andererseits ist der $H^s(\mathbb{R}^n)$ ein Hilbertraum, und nach dem Darstellungssatz von Riesz kann der Dual des $H^s(\mathbb{R}^n)$ auch mit dem $H^s(\mathbb{R}^n)$ identifiziert werden. Es ist allerdings wenig sinnvoll, beide Identifizierungen gleichzeitig vornehmen zu wollen. Wenn man den $\mathbb{R}^n_\xi$ als Mannigfaltigkeit betrachtet, dann entsprechen diese unterschiedlichen Identifizierungen gerade der Wahl unterschiedlicher Dichten.

Unser Ziel ist es zu zeigen, daß jeder Operator $\mathcal{A}\in\Psi^m_{\varrho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ mit globalen Symbolabschätzungen den $H^s(\mathbb{R}^n)$ nach $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ abbildet, für alle $s,m\in\mathbb{R}$, bei den üblichen Voraussetzungen an ϱ und δ, nämlich $0\le\delta<\varrho\le 1$.

Nun ist $H^s(\mathbb{R}^n) = \langle D\rangle^{-s} L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{A}\in\Psi^m_{\varrho,\delta}$ genau dann, wenn $\mathcal{A}_0 := \langle D\rangle^{s-m}\mathcal{A}\langle D\rangle^{-s}\in\Psi^0_{\varrho,\delta}$. Wir erkennen dann, daß $\mathcal{A}$ den Raum H^s genau dann in den H^{s-m} stetig abbildet, wenn $\mathcal{A}_0$ den Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$ stetig in sich abbildet.

Im Folgenden dürfen wir also $m=s=0$ annehmen.

Wir fangen langsam an:

Lemma 6.11. *Sei $a=a(x,y,\xi)\in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ mit globalen Symbolabschätzungen. Dann bildet der dazugehörige Operator $\mathcal{A}$ den Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$ stetig in sich ab.*

Beweis. Mit dem Schwartz–Kern A haben wir $(\mathcal{A}u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n_y} A(x,y)u(y)\,\mathrm{d}y$. Der Schwartz–Kern A wird durch (5.3) gegeben, und wir bekommen auf diesem Wege $A\in L^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. Weiterhin haben wir

$$(y-x)^\alpha A(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}(x-y)\xi} D^\alpha_\xi a(x,y,\xi)\,\text{đ}\xi,$$

und somit bekommen wir eine Familie von Abschätzungen für das Abklingen von A, wenn man von der Diagonalen wegläuft:

$$|A(x,y)| \le C_K\langle x-y\rangle^{-K}, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^{2n}, \quad \forall K\in\mathbb{N}.$$

Der Rest ist Arithmetik. □

Man erkennt nach einem scharfen Blick auf den Beweis, daß man auch $a\in S^{-N}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ voraussetzen kann mit $N\gg 1$.

Folgerung 6.12. *Sei $R\in\Psi^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. Dann bildet R jeden $H^s(\mathbb{R}^n)$ in jeden $H^t(\mathbb{R}^n)$ stetig ab, für $s,t\in\mathbb{R}$.*

Beweis. Wenn $R\in\Psi^{-\infty}$, dann auch $\langle D\rangle^{s-t} R\langle D\rangle^{-s}$. □

[1] Zu welchem Sobolevraum gehört Diracs Delta ?

Nun folgt sehr schnell:

Lemma 6.13. *Klassische Operatoren $\mathcal{A} \in \Psi^0_{\mathrm{cl}}(\mathbb{R}^n)$ bilden den $L^2(\mathbb{R}^n)$ stetig in sich ab.*

Beweis. Wir haben, für jedes N, die Tensorproduktdarstellung

$$\mathcal{A}(x, D_x) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{h(l,n-2)} a_{jlm}(x) \cdot Y_{lm}(D_x) \cdot |D_x|^{-j} \varphi(D_x) + R_N(x, D_x)$$

mit $R_N \in \Psi^{-N}(\mathbb{R}^n)$. Jeder einzelne Faktor in den Summanden stellt einen Operator dar, der im $L^2(\mathbb{R}^n)$ beschränkt wirkt. Hierzu brauchen wir noch die Abschätzung $\|Y_{lm}(\xi)\|_{L^\infty(S^{n-1})} \le C \langle l \rangle^{n/2+1}$, die man zum Beispiel aus dem Einbettungssatz von Sobolev herausholt (Hausaufgabe, Blatt 4), oder geeignet nachrechnet (oder aus passenden Nachschlagewerken zitiert). □

Für nicht-klassische Operatoren steht diese Tensorproduktdarstellung nicht zur Verfügung, und wir müssen anders herangehen.

Es ist dabei keine zusätzliche Schwierigkeit, gleich matrix-wertig zu arbeiten. Sei also $p = p(x, \xi)$ ein matrix-wertiges Symbol (nicht unbedingt eigentlich getragen). Dann nennen wir die zu p hermitesch adjungierte Matrix $p^*(x, \xi)$. Den selbst-adjungierten Anteil von p nennen wir $\Re p$, im Sinne von

$$\Re p(x, \xi) := \frac{1}{2}(p(x, \xi) + p^*(x, \xi)).$$

Der Operator zum Symbol p sei P, und sein L^2–adjungierter Operator heiße P^*. Achtung: P^* hat als Symbol **nicht** p^*, sondern nur modulo $S^{-(\varrho-\delta)}_{\varrho,\delta}$. Der selbst-adjungierte Anteil von P heißt wiederum $\Re P$, definiert als

$$\Re P := \frac{1}{2}(P + P^*).$$

Wenn A und B zwei selbst-adjungierte Matrizen sind, dann bedeutet die Ungleichung $A \ge B$, daß die Differenzmatrix semi-positiv definit ist.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun anfangen, Wurzeln zu ziehen:

Satz 6.14. *Sei $p \in S^0_{\varrho,\delta}$ (mit globalen Symbolabschätzungen) ein matrix-wertiges Symbol, mit Werten im $\mathbb{C}^{k\times k}$, und sei*

$$\Re p(x, \xi) \ge cI_k, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi| \ge M,$$

für ein $c > 0$. Sei $0 \le \delta < \varrho \le 1$.

Dann existiert ein Operator $B \in \Psi^0_{\varrho,\delta}$, sodaß

$$\Re P - B^* B \in \Psi^{-\infty}.$$

Beweis. Wir können p so durch ein Symbol aus $S^{-\infty}$ stören, daß die Ungleichung $\Re p(x, \xi) \ge cI_k$ auf ganz $\mathbb{R}^{2n}$ gilt (dieser Schritt ist nicht ganz einfach).

Für das Symbol b zum Operator B machen wir den Ansatz $b \sim \sum_{j=0}^{\infty} b_j$ mit matrix-wertigen Summanden $b_j \in S^{-j(\varrho-\delta)}_{\varrho,\delta}$.

Man nimmt zunächst[2]

$$b_0(x, \xi) := (\Re p(x, \xi))^{1/2}, \qquad (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Dies ergibt eine selbst-adjungierte Matrix. Mit den Methoden der Hausaufgaben (Blatt 7) zeigt man, daß $b_0 \in S^0_{\varrho,\delta}$, mit globalen Symbolabschätzungen. Anschließend modifiziert man dieses b_0 modulo $S^{-\infty}$, damit es eigentlich getragen wird. Das Ergebnis nennen wir weiterhin b_0. Sei B_0 der Operator mit Symbol b_0. Achtung: B_0 ist kein selbst-adjungierter Operator.

[2] Die Wurzeln aus positiv definiten Matrizen zieht man mittels Spektralsatz.

Der Operator $B_0^* B_0$ hat als Hauptsymbol $b_0^* b_0 = \Re p$, also ist

$$\Re P - B_0^* B_0 =: R_0 \in \Psi_{\varrho,\delta}^{-(\varrho-\delta)}.$$

Als Differenz zweier selbst-adjungierter Operatoren ist auch R_0 ein selbst-adjungierter Operator, und wegen $R_0 = R_0^*$ ist dann auch $\sigma(R_0) = \sigma(R_0^*)$, wobei σ die Abbildung vom Operator auf sein Symbol benennt. Andererseits haben wir auch, nach den Rechenregeln des Symbolkalküls,

$$(\sigma(R_0^*))(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \Big((\sigma(R_0))^*(x,\xi) \Big),$$

also ist $\sigma(R_0) = \sigma(R_0^*) \equiv (\sigma(R_0))^* \mod S_{\varrho,\delta}^{-(\varrho-\delta)}$.

Somit ist das Hauptsymbol von R_0 eine selbst-adjungierte Matrix[3].

Nun gehen wir induktiv vor: es seien $b_0, \ldots, b_j$ schon ermittelt, mit $b_k \in S_{\varrho,\delta}^{-k(\varrho-\delta)}$, alle eigentlich getragen. Und wir haben

$$\Re P - (B_0 + B_1 + \cdots + B_j)^*(B_0 + B_1 + \cdots + B_j) =: R_j \in \Psi_{\varrho,\delta}^{-(j+1)(\varrho-\delta)}.$$

Der Operator R_j ist selbst-adjungiert. Und nun suchen wir ein Symbol $b_{j+1} \in S_{\varrho,\delta}^{-(j+1)(\varrho-\delta)}$, sodaß für den dazugehörigen Operator B_{j+1} gilt:

$$\Re P - (B_0 + B_1 + \cdots + B_j + B_{j+1})^*(B_0 + B_1 + \cdots + B_j + B_{j+1}) \in \Psi_{\varrho,\delta}^{-(j+2)(\varrho-\delta)}.$$

Dafür ist es hinreichend, ein b_{j+1} aus der angegebenen Symbolklasse zu finden, sodaß

$$R_j - B_0^* B_{j+1} - B_{j+1}^* B_0 \in \Psi_{\varrho,\delta}^{-(j+2)(\varrho-\delta)},$$

denn die anderen Produkte liegen sowieso in dieser Operatorklasse. Also verlangen wir vom Matrix-Symbol b_{j+1}, daß

$$\sigma(R_j) \overset{!}{=} b_0 b_{j+1} + b_{j+1}^* b_0.$$

Diese Matrix-Gleichung ist tatsächlich lösbar, und wir finden ein b_{j+1}, das selbst-adjungiert ist und zur selben Symbolklasse wie $\sigma(R_j)$ gehört.

Das Lösen einer solchen Matrix-Gleichung geschieht wie folgt: seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die (positiv reellen) Eigenwerte von b_0, angeordnet (wiederholt entsprechend Vielfachheit) in einer Diagonalmatrix Λ, sei U die Matrix der dazugehörigen Eigenvektoren, auf Länge 1 normiert, dann haben wir

$$b_0 U = U\Lambda, \qquad U^* b_0 = \Lambda U^*, \qquad U^* U = I_k.$$

Mit der Zielvorgabe, daß $b_{j+1} = b_{j+1}^*$ sein soll, haben wir dann

$$\begin{aligned} U^*\sigma(R_j)U &= U^* b_0 b_{j+1} U + U^* b_{j+1} b_0 U = \Lambda U^* b_{j+1} U + U^* b_{j+1} U \Lambda \\ &= \Lambda W + W\Lambda, \end{aligned}$$

wenn wir $W = U^* b_{j+1} U$ setzen. Nun ist aber der Matrix-Eintrag von $(\Lambda W + W\Lambda)$ an Position (p,q) gleich $(\lambda_p + \lambda_q) w_{pq}$, und $\lambda_p + \lambda_q$ ist immer positiv. Also können wir die w_{pq} direkt ausrechnen. Die linke Seite $U^*\sigma(R_j)U$ ist hermitesch, also auch W. Und dann ist $b_{j+1} = UWU^*$, was tatsächlich hermitesch ist.

Wir finden also die gesuchten (eigentlich getragenen) $b_j \in S_{\varrho,\delta}^{-j(\varrho-\delta)}$ und summieren diese auf zu einem (eigentlich getragenen) $b \in S_{\varrho,\delta}^0$. Der dazugehörige Operator erfüllt dann unsere Wünsche. □

[3] Das sollten wir festhalten: das Hauptsymbol eines selbst-adjungierten Operators ist eine selbst-adjungierte Matrix.

Auf dem $\mathbb{C}^k$ führen wir die normale Pythagoras-Norm ein, und auf dem Raum $\mathbb{C}^{k\times k}$ die Operator-Norm:

$$\|A\|_{\mathbb{C}^{k\times k}} := \sup_{z\neq 0} \frac{\|Az\|_{\mathbb{C}^k}}{\|z\|_{\mathbb{C}^k}} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)}.$$

Satz 6.15. *Sei $a \in S^0_{\varrho,\delta}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^{k\times k})$ mit $0 \le \delta < \varrho \le 1$, eigentlich getragen und mit globalen Symbolabschätzungen. Sei weiterhin*

$$\sup\left\{ \|a(x,\xi)\|_{\mathbb{C}^{k\times k}} : x \in \mathbb{R}^n,\ |\xi| \ge C_0 \right\} < M < \infty.$$

Dann existiert ein $R \in \Psi^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ (von M abhängig) mit

$$\|\mathcal{A}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le M^2 \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \langle Ru, u\rangle_{L^2}, \qquad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^k).$$

Mit Dichtheitsargumenten bekommt man diese Ungleichung dann auch für alle $u \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^k)$.

Beweis. Der Operator $C = M^2 - \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ hat das Hauptsymbol $M^2 - a^*a$, also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $M^2 - a^*a \ge \varepsilon I_k$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle ξ mit $|\xi| \ge C_0$.
Also existiert ein $\mathcal{B} \in \Psi^0_{\varrho,\delta}$ mit $C - \mathcal{B}^*\mathcal{B} = -R \in \Psi^{-\infty}$, also

$$\left\langle M^2 u, u\right\rangle_{L^2} = \langle \mathcal{A}^*\mathcal{A}u, u\rangle_{L^2} + \langle \mathcal{B}^*\mathcal{B}u, u\rangle_{L^2} - \langle Ru, u\rangle_{L^2},$$

woraus die Behauptung durch Umsortieren folgt. □

Wir tragen unsere Ergebnisse zusammen:

Satz 6.16 (Abbildungseigenschaften). *Sei $\mathcal{A} \in \Psi^m_{\varrho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ mit globalen Symbolabschätzungen. Dann gibt es zu jedem $s \in \mathbb{R}$ eine Konstante C_s (von $\mathcal{A}$ abhängig) mit*

$$\|\mathcal{A}u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \le C_s \|u\|_{H^{s+m}(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall u \in H^{s+m}(\mathbb{R}^n).$$

Beweis. Der Beweis folgt (wenn $s = m = 0$) aus

$$|\langle Ru, u\rangle_{L^2}| \le \|Ru\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \le C_r \|u\|_{H^r} \|u\|_{L^2} \le C_{r,\gamma} \|u\|^2_{H^r} + \gamma \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

für jedes $\gamma > 0$. □

Interessant ist, daß man für elliptische Operatoren auch Abschätzungen nach unten bekommen kann:

Satz 6.17 (Abbildungseigenschaften im elliptischen Fall). *Sei $\mathcal{A} \in \Psi^m_{\varrho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ ein skalarer Operator mit globalen Symbolabschätzungen, und sei $\mathcal{A}$ elliptisch. Dann gibt es, zu jeglichen $s,t \in \mathbb{R}$, positive Konstanten c_1 und c_2 (von s,t abhängig) mit*

$$c_1 \|u\|_{H^{s+m}(\mathbb{R}^n)} - c_2 \|u\|_{H^t(\mathbb{R}^n)} \le \|\mathcal{A}u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Wir bekommen daraus nach Dichteargumenten eine schöne Regularitätsaussage: wenn $u \in H^t(\mathbb{R}^n)$ für irgendein $t \ll -1$ und $\mathcal{A}u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, dann muß $u \in H^{s+m}(\mathbb{R}^n)$ sein.

Beweis. Wir haben eine Parametrix $\mathcal{B} \in \Psi^{-m}_{\varrho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ zu $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{B}\mathcal{A} = I + R$ und $R \in \Psi^{-\infty}$. Auf $\mathcal{B}$ wenden wir dann nur noch Satz 6.16 an. □

Wir verschärfen unseren Elliptizitätsbegriff etwas:

Definition 6.18 (Stark elliptischer Operator). *Ein Operator $P \in \Psi^m_{\varrho,\delta}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^{k\times k})$ mit globalen Symbolabschätzungen heißt* stark elliptisch[4]*, wenn es Konstanten $M > 0$ und $C_0 > 0$ gibt mit*

$$\Re p(x,\xi) \ge M \langle\xi\rangle^m I_k$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| > C_0$.

[4] strongly elliptic

Satz 6.19 (Ungleichung von Gårding). *Sei $P \in \Psi^m_{\varrho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \le \delta < \varrho \le 1$ ein stark elliptischer Matrix-Operator, und sei $t \in \mathbb{R}$ gewählt. Dann existieren positive Zahlen M' und C_0, sodaß*

$$\Re \langle Pu, u\rangle_{L^s} \ge M' \|u\|^2_{H^{m/2}(\mathbb{R}^n)} - C_1 \|u\|^2_{H^t(\mathbb{R}^n)} ,$$

für alle $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$.

Beweis. Wir setzen $P_0 = \langle D\rangle^{-m/s} \circ P(x, D) \circ \langle D\rangle^{-m/2}$ und haben $P_0 \in \Psi^0_{\varrho,\delta}$. Dieser Operator hat ein Symbol p_0, für das $\Re p_0(x, \xi) \ge M_1 I_k$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| \ge C_0'$. Hierbei ist M_1 etwas kleiner als M, und C_0' ist vermutlich erheblich größer als C_0 (abhängig von der Wahl von M_1). Wir setzen $v = \langle D\rangle^{m/2} u$ und bekommen $\langle Pu, u\rangle = \langle P_0v, v\rangle$ sowie $\|u\|_{H^{m/2}} = \|v\|_{L^2}$, also können wir im Folgenden $m = 0$ annehmen.

Wir schreiben wieder P statt P_0. Wir setzen $q(x, \xi) := p(x, \xi) - \frac{1}{2}MI_k$. Dann haben wir

$$\Re q(x, \xi) \ge \frac{1}{2}MI_k, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi| \ge C_0',$$

also existiert ein $\mathcal{B} \in \Psi^0_{\varrho,\delta}$ mit

$$\frac{1}{2}(Q + Q^*) - \mathcal{B}^*\mathcal{B} \in \Psi^{-\infty}.$$

Nun ist

$$\Re \langle Qu, u\rangle_{L^2} = \left\langle \frac{1}{2}(Q + Q^*)u, u\right\rangle_{L^2} = \langle \mathcal{B}^*\mathcal{B}u, u\rangle_{L^2} + \langle Ru, u\rangle_{L^2} ,$$

andererseits aber $\langle Qu, u\rangle_{L^2} = \langle Pu, u\rangle_{L^2} - \frac{1}{2}M \|u\|^2_{L^2}$. Wir bekommen die Behauptung mit $M' = \frac{1}{2}M - \gamma$ für jedes $\gamma > 0$ (man kann sogar M' beliebig nah an M bekommen). □

Ein Standardbeispiel ist ein skalarer Differentialoperator $\mathcal{A} = \sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ mit symmetrischer positiv definiter Form $\xi \mapsto \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ als Hauptteil.

Für solche Operatoren wollen wir in Zukunft das Spektrum untersuchen:

Satz 6.20. *Sei $\mathcal{A} = \sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ mit $a_\alpha \in C^\infty_b(\mathbb{R}^n)$ und*

$$\Re \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\xi^\alpha \ge c|\xi|^2, \qquad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Dann existiert ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, sodaß für alle $\lambda > \lambda_0$ der Operator $\mathcal{A} + \lambda$ einen Isomorphismus zwischen $H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$ und $H^s(\mathbb{R}^n)$ darstellt, für jedes $s \in \mathbb{R}$. Die inverse Abbildung $(\mathcal{A} + \lambda)^{-1}$ ist ein ΨDO aus dem $\Psi^{-2}_{1,0}(\mathbb{R}^n)$, und für jede Parametrix $\mathcal{B}_\lambda$ von $\mathcal{A} + \lambda$ gilt $B_\lambda - (\mathcal{A} + \lambda)^{-1} \in \Psi^{-\infty}$.

Beweis. Zunächst bildet $\mathcal{A}+\lambda$ stetig von $H^2(\mathbb{R}^n)$ nach $L^2(\mathbb{R}^n)$ ab. Aus der Gårding–Ungleichung erkennen wir, daß diese Abbildung injektiv ist für große λ, denn dann haben wir mit $t = 0$

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{A} + \lambda)u\|_{L^2} \cdot \|u\|_{L^2} &\ge |\langle(\mathcal{A} + \lambda)u, u\rangle_{L^2}| \ge |\Re \langle(\mathcal{A} + \lambda)u, u\rangle_{L^2}| = \Re \langle(\mathcal{A} + \lambda)u, u\rangle_{L^2}\\ &\ge M' \|u\|^2_{H^1} + (\lambda - C_1) \|u\|^2_{L^2}\\ &\ge (\lambda - C_1) \|u\|^2_{L^2} ,\end{aligned}$$

und somit auch $\|(\mathcal{A} + \lambda)u\|_{L^2} \ge (\lambda - C_1) \|u\|_{L^2}$. Als nächstes zeigen wir, daß $\mathcal{A} + \lambda$ surjektiv ist. Dazu setzen wir

$$\mathcal{A}_{0,\lambda} := (\mathcal{A} + \lambda) \circ \langle D\rangle^{-2} ,$$

was von L^2 nach L^2 stetig abbildet. Aus der Gårding–Ungleichung erhalten wir ein weiteres Mal, daß (für große λ) $\mathcal{A}_{0,\lambda}$ eine injektive Abbildung ist. Und wir haben Abschätzungen der Form $C^{-1} \|u\|_{L^2} \le \|\mathcal{A}_{0,\lambda}u\|_{L^2} \le C \|u\|_{L^2}$, also ist insbesondere $\operatorname{img} \mathcal{A}_{0,\lambda}$ abgeschlossen.

Nun ist $\operatorname{img} \mathcal{A}_{0,\lambda}$ ein abgeschlossener Unterraum des $L^2(\mathbb{R}^n)$, und wir können das orthogonale Komplement bilden. Sei also $g \in (\operatorname{img} \mathcal{A}_{0,\lambda})^\perp$. Dann ist $\langle g, \mathcal{A}_{0,\lambda}v\rangle_{L^2} = 0$ für jedes $v \in L^2$, also auch $\mathcal{A}^*_{0,\lambda}g = 0$. Wir können die Gårding–Ungleichung aber auch für den adjungierten Operator $\mathcal{A}_{0,\lambda}^*$ einsetzen und stellen diesen dann als injektiv fest. Also ist $g = 0$ und somit $\mathcal{A}_{0,\lambda}$ surjektiv als Abbildung des L^2 in sich.

Damit ist $\mathcal{A} + \lambda$ bijektiv als Abbildung von H^2 nach L^2. Wir haben somit

$$(\mathcal{A} + \lambda) \circ (\mathcal{A} + \lambda)^{-1} = I \qquad \text{auf} \quad L^2(\mathbb{R}^n)$$
$$(\mathcal{A} + \lambda)^{-1} \circ (\mathcal{A} + \lambda) = I \qquad \text{auf} \quad H^2(\mathbb{R}^n).$$

Wir schalten von links eine Parametrix $B_\lambda \in \Psi_{1,0}^{-2}$ zu $(\mathcal{A} + \lambda)$ an die erste Gleichung:

$$(I - R_1) \circ (A + \lambda)^{-1} = B_\lambda \qquad \text{auf} \quad L^2(\mathbb{R}^n),$$

woraus $(\mathcal{A} + \lambda)^{-1} = B_\lambda + R_1 \circ (\mathcal{A} + \lambda)^{-1}$ als Identität im $L^2(\mathbb{R}^n)$ folgt. Dann ist die rechte Seite eine stetige Abbildung von $H^s(\mathbb{R}^n)$ in $H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$, für jedes $s \geq 0$, also auch die linke Seite.

Wir schalten von rechts ein B_λ an die zweite Gleichung:

$$(\mathcal{A} + \lambda)^{-1} \circ (I - R_2) = B_\lambda \qquad \text{auf} \quad L^2(\mathbb{R}^n),$$

woraus $(\mathcal{A} + \lambda)^{-1} = B_\lambda + (\mathcal{A} + \lambda)^{-1} \circ R_2$ folgt. Also bildet $(\mathcal{A} + \lambda)^{-1}$ jeden $H^s(\mathbb{R}^n)$ stetig in $H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$ ab, für $s \leq 0$.

Damit ist $\mathcal{A} + \lambda$ der gewünschte Isomorphismus zwischen H^{s+2} und H^s, für jedes $s \in \mathbb{R}$. Wir stellen weiterhin fest, daß $(\mathcal{A} + \lambda)^{-1} - \mathcal{B}_\lambda$ jeden Sobolevraum stetig in jeden Sobolevraum abbildet. Aus den Hausaufgaben ergeben sich die Teilmengenbeziehungen

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \bigcup_{s \in \mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^n), \qquad \bigcap_{s \in \mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n),$$

sodaß $(\mathcal{A} + \lambda)^{-1} - \mathcal{B}_\lambda$ stetig von $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ abbildet, also muß diese Differenz ein Operator aus dem $\Psi^{-\infty}$ sein. □

Als nächstes betrachten wir Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, offen und mit glattem Rand, aber nicht unbedingt beschränkt.

Definition 6.21 (Sobolevräume). *Sei $s \geq 0$. Dann setzen wir*

$$H^s(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) \colon \ \exists \tilde{u} \in H^s(\mathbb{R}^n) \ \textit{mit} \ u = \tilde{u} \ \textit{auf} \ \Omega \right\},$$

was ein linearer Raum ist, den wir mit der Norm

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} := \inf_{\tilde{u}} \|\tilde{u}\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

ausstatten. Dabei erstreckt sich das Infimum über alle $\tilde{u} \in H^s(\mathbb{R}^n)$, die auf Ω mit u übereinstimmen.

Für $s \in \mathbb{N}$ wird eine äquivalente Norm in Definition 3.27 gegeben.

Definition 6.22 (Sobolevräume mit Nullrandwerten). *Sei $s \geq 0$. Der Abschluß von $C_0^\infty(\Omega)$ in der Norm des $H^s(\Omega)$ wird mit $H_0^s(\Omega)$ bezeichnet.*

Aus der Definition heraus ist $H_0^s(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum des $H^s(\Omega)$.

Aus Aufgabe 5 von Blatt 4 kann man herausholen, daß jede Funktion $u \in H^s(\Omega)$ mit $s > 1/2$ auf dem Rand $\partial\Omega$ Spuren $\gamma_0 u \in H^{s-1/2}(\partial\Omega)$ hinterläßt, wobei wir $H^{s-1/2}(\partial\Omega)$ als Sobolevraum auf einer Mannigfaltigkeit interpretieren werden.

Weiterhin definieren wir[5] (siehe auch [14]):

Definition 6.23 (Sonstige Sobolevräume). *Für $s < 0$ sei $H^s(\Omega)$ der Dualraum zum Banachraum $H_0^{-s}(\Omega)$.*

Für $s \in \mathbb{R}$ sei $H^s_{\mathrm{comp}}(\Omega)$ der Raum aller Distributionen $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, für die supp u *kompakt in Ω enthalten ist.*

Für $s \in \mathbb{R}$ sei $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ der Raum aller Distributionen $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, für die $\varphi u \in H^s_{\mathrm{comp}}(\Omega)$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

[5] Wie sehen passende Topologien für diese Räume aus ?

Das sind alles Unterräume von $\mathcal{D}'(\Omega)$. Man rechnet schnell nach, daß

$$\mathcal{E}'(\Omega) = \bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s_{\mathrm{comp}}(\Omega), \qquad \mathcal{D}(\Omega) = \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s_{\mathrm{comp}}(\Omega),$$
$$\mathcal{D}'(\Omega) = \bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega), \qquad \mathcal{E}(\Omega) = \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Damit können wir schon einige Abbildungseigenschaften beweisen:

Satz 6.24. *Sei $\mathcal{A} \in \Psi^m_{\varrho,\delta}(\Omega)$, nicht unbedingt eigentlich getragen, mit lokalen Symbolabschätzungen. Dieser Operator bildet $H^{s+m}_{\mathrm{comp}}(\Omega)$ stetig nach $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ab, für $s, s+m \geq 0$.*

Beweisskizze. Nimm $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Sei $E\colon H^s(\Omega) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ der Extensionsoperator, der eine auf Ω lebende Funktion auf den ganzen $\mathbb{R}^n$ durch 0 fortsetzt. Dann haben wir, für $u \in H^{s+m}_{\mathrm{comp}}(\Omega)$,

$$\|\varphi\mathcal{A}u\|_{H^s(\Omega)} \leq \|E\varphi\mathcal{A}u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|Eu\|_{H^{s+m}(\mathbb{R}^n)} \leq C'\,\|u\|_{H^{s+m}(\Omega)},$$

wobei die erste Ungleichung sich sofort aus der Definition von $H^s(\Omega)$ ergibt, die zweite aus unseren Ganzraumergebnissen folgt, und die dritte etwas kniffliger ist. $\square$

Wenn $\mathcal{A} \in \Psi^m_{\varrho,\delta}$ allerdings globale Symbolabschätzungen hat und eigentlich getragen ist, dann bildet $\mathcal{A}$ linear und stetig ab wie folgt:

$$\mathcal{A}\colon H^{s+m}(\Omega) \to H^s(\Omega),$$
$$\mathcal{A}\colon H^{s+m}_{\mathrm{comp}}(\Omega) \to H^s_{\mathrm{comp}}(\Omega),$$
$$\mathcal{A}\colon H^{s+m}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \to H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega),$$

unter der Annahme, daß $s, s+m \geq 0$.

Ohne Beweis vermerken wir noch:

Satz 6.25 (Kompakte Einbettung). *Sei Ω beschränkt*[6]*, mit glattem Rand. Dann ist die Einbettung $H^s(\Omega) \hookrightarrow H^t(\Omega)$ für $0 \leq t < s$ kompakt.*

Man denke dabei z.B. an den Satz von Arzela-Ascoli.

Nun wollen wir Mannigfaltigkeiten betrachten. Aus (6.7) bekommen wir:

Lemma 6.26. *Sei $\mathcal{M}$ eine geschlossene Mannigfaltigkeit (also insbesondere ohne Rand) und $\mathcal{A} \in \Psi^0_{\mathrm{cl}}(\mathcal{M})$. Dann bildet $\mathcal{A}$ den Raum $L^2(\mathcal{M};\Omega^\alpha\mathcal{M})$ stetig in sich ab, und auch den Raum $L^2(\mathcal{M})$ stetig in sich. Hierbei verstehen wir den $L^2(\mathcal{M})$ als lokalkonvexen topologischen Raum gemäß Definition 2.36.*

Man beachte, daß dieser $L^2(\mathcal{M})$ kein Hilbertraum ist, denn es wird nicht auf $\mathcal{M}$ integriert.

Lebesgue-Räume sind uns auf Dauer zu wenig, weshalb wir uns jetzt Sobolevräume auf Mannigfaltigkeiten erarbeiten. Zunächst beschreiben wir, wie man Parametrizes auf Mannigfaltigkeiten ermittelt. Sei $\mathcal{A} \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(\mathcal{M})$ elliptisch, und $\mathcal{M}$ sei überdeckt mit Kartengebieten U_j. Die Abschneidefunktionen φ_j und ψ_j werden gemäß (6.6) gewählt. Der Operator $\mathcal{A}$ in U_j wird heruntergezogen zu einem elliptischen Operator $\tilde{\mathcal{A}}_j \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(\tilde{U}_j)$, die eigentlich getragene Parametrix dazu heiße $\tilde{\mathcal{B}}_j \in \Psi^{-m}_{\mathrm{cl}}(\tilde{U}_j)$, die wir wieder hochschieben zu $\mathcal{B}_j \in \Psi^{-m}_{\mathrm{cl}}(U_j)$. Dann setzt man

$$\mathcal{B} := \sum_{j=1}^\infty \psi_j \mathcal{B}_j \circ \varphi_j,$$

wobei $\mathcal{B}_j \circ \varphi_j$ als Komposition von $\mathcal{B}_j$ mit dem Multiplikationsoperator φ_j zu verstehen ist. Man beachte, daß auf einem Überlappungsgebiet $U_j \cap U_k$ die Operatoren $\mathcal{B}_j$ und $\mathcal{B}_k$ lokale Parametrizes zum selben Operator $\mathcal{A}$ sind, sich also nur um einen glättenden Operator unterscheiden können.

Das nächste Ergebnis ist entscheidend, um Sobolevräume auf Mannigfaltigkeiten überhaupt definieren zu können.

[6] Diese Voraussetzung ist entscheidend !

Satz 6.27. *Sei $\mathcal{M}$ eine glatte Mannigfaltigkeit, $m \in \mathbb{R}$. Dann existieren elliptische, klassische, eigentlich getragene ΨDO der Ordnung m auf $\mathcal{M}$, mit positivem Hauptsymbol.*

Beweis. Wir verwenden die eingeführten Bezeichnungen. In $\tilde{U}_j$ wählen wir einen eigentlich getragenen elliptischen Operator $\tilde{A}_j \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(\tilde{U}_j)$ mit Hauptsymbol $|\xi|^m$. Wir schieben ihn hoch auf die Mannigfaltigkeit und bekommen $\mathcal{A}_j \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(U_j)$. Wir setzen diesen fort auf ganz $\mathcal{M}$ im Sinne von $\psi_j\mathcal{A}_j \circ \varphi_j \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(\mathcal{M})$. Diese eigentlich getragenen Operatoren können wir lokalfinit addieren zu

$$\mathcal{A} := \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \mathcal{A}_j \circ \varphi_j.$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß $\mathcal{A}$ elliptisch ist und ein positives Hauptsymbol hat. Das machen wir so: in der Karte κ_j hat $\psi_j\mathcal{A}_j \circ \varphi_j$ das Hauptsymbol $|\xi|^m\varphi_j(x)$. Bei einem Kartenwechsel κ wechselt das Hauptsymbol eines Operators $\mathcal{B}$ von $b_m(x,\xi)$ zu $b_m(\kappa(x), (\kappa'(x))^{-\top}\xi)$, also hat in einer benachbarten Karte der Operator $\psi_j\mathcal{A}_j \circ \varphi_j$ ein Hauptsymbol der Form $\varphi_j(\kappa(x))a^{(j)}(x,\xi)$ mit $a^{(j)}(x,\xi) \geq c_j|\xi|^m$ für ein positives c_j. Und auch die φ_j werden niemals negativ. Also finden wir ein positives ε, sodaß das Hauptsymbol von $\mathcal{A}$ in jeder Karte die Ungleichung $a_m(x,\xi) \geq \varepsilon|\xi|^m$ erfüllt. □

Definition 6.28 (Sobolevräume als Mengen). *Sei $\mathcal{M}$ eine geschlossene Mannigfaltigkeit, $s \in \mathbb{R}$ und $\Lambda_s \in \Psi^s_{\mathrm{cl}}(\mathcal{M})$ ein elliptischer Operator auf $\mathcal{M}$, eigentlich getragen. Dann nennen wir die Menge*

$$H^s(\mathcal{M}) := \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathcal{M}; \Omega^0\mathcal{M}) \colon \Lambda_s u \in L^2(\mathcal{M}) \right\}$$

einen Sobolevraum. Hierbei ist $L^2(\mathcal{M})$ zu verstehen im Sinne von Definition 2.36.

Schnitte durch das Nulldichtenbündel sind wegen $\Omega^0\mathcal{M} \cong \mathcal{M} \times \mathbb{C}$ äquivalent mit Funktionen, weshalb wir ab jetzt den Ausdruck $\Omega^0\mathcal{M}$ nicht mehr mitschreiben. Wenn man darauf verzichtet, Operatoren zu adjungieren, kann man die Einführung von Dichten umgehen (aber dann kann man Operatoren nur auf einigermaßen glatte Funktionen wirken lassen).

Unschwer erkennt man $H^s(\mathcal{M})$ als Vektorraum (zunächst noch ohne Topologie).

Für allgemeine Mannigfaltigkeiten sollte man $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M})$ und $H^s_{\mathrm{comp}}(\mathcal{M})$ einführen, wenn man die Abbildungseigenschaften von ΨDO studieren will. Das wollen wir hier nicht weiter vertiefen und verweisen stattdessen auf [13]. Ab jetzt sei also $\mathcal{M}$ eine kompakte geschlossene Mannigfaltigkeit (insbesondere ohne Rand). Dann ist $\mathcal{D}(\mathcal{M}) = \mathcal{E}(\mathcal{M})$ sowie $\mathcal{D}'(\mathcal{M}) = \mathcal{E}'(\mathcal{M})$.

Man überlegt sich schnell:

- Man kann Λ_{-s} als (eigentlich getragene) Parametrix zu Λ_s annehmen, also $\Lambda_s\Lambda_{-s} = I - R_s$ mit $R_s \in \Psi^{-\infty}(\mathcal{M})$.
- Sei $u \in L^2(\mathcal{M})$ und $v := \Lambda_{-s}u$. Dann ist $\Lambda_s v = \Lambda_s\Lambda_{-s}u = u - R_s u$, und somit ist $\Lambda_{-s} \in \mathrm{Lin}(L^2(\mathcal{M}), H^s(\mathcal{M}))$, dem Raum der linearen Abbildungen zwischen den beiden Vektorräumen.
- Für $\mathcal{A} \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(\mathcal{M})$ ist $\mathcal{A} \equiv \Lambda_{-s}\mathcal{A}_0\Lambda_{s+m} \mod \Psi^{-\infty}(\mathcal{M})$ mit $\mathcal{A}_0 = \Lambda_s\mathcal{A}\Lambda_{-s-m}$, also ist $\Psi^m_{\mathrm{cl}}(\mathcal{M}) \subset \mathrm{Lin}(H^{s+m}(\mathcal{M}), H^s(\mathcal{M}))$ für alle $s, m \in \mathbb{R}$.
- Die Definition der Räume $H^s(\mathcal{M})$ ist von der Wahl der Λ_s unabhängig.

Weitere Definitionen von $H^s(\mathcal{M})$ sind die folgenden:

- der $H^s(\mathcal{M})$ besteht aus allen Distributionen $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$, für die $\mathcal{A}u \in L^2(\mathcal{M})$ für jeden eigentlich getragenen Operator $\mathcal{A} \in \Psi^s_{\mathrm{cl}}(\mathcal{M})$ (siehe Anmerkung nach Theorem 18.1.29 in [8]).
- der $H^s(\mathcal{M})$ besteht aus allen Distributionen $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$, sodaß für jede Kartenabbildung $\kappa\colon U \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ gilt, daß $u \circ \kappa^{-1} \in H^s(\tilde{U})$ gilt, mit $u \circ \kappa^{-1}$ im Sinne von Definition 2.37 (siehe [14, Definition 2.1.10]).

Nun verschaffen wir uns eine Topologie für $H^s(\mathcal{M})$.

Definition 6.29 (Skalarprodukt). *Sei $\mathcal{M}$ eine Mannigfaltigkeit mit U_j, κ_j und φ_j wie üblich. Dann definieren wir ein Skalarprodukt auf $H^s(\mathcal{M})$ durch*

$$\langle u, v\rangle_{H^s(\mathcal{M})} := \sum_j \left\langle (\kappa_j^{-1})^*(\varphi_j u), (\kappa_j^{-1})^*(\varphi_j v)\right\rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \qquad u, v \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Lemma 6.30. *Mit diesem Skalarprodukt wird $H^s(\mathcal{M})$ zu einem Hilbertraum.*

Beweis. Man sieht, daß der obige Ausdruck eine Bilinearform auf $H^s(\mathcal{M})$ ist, die hermitesch und positiv definit ist. Es fehlt nur noch die Vollständigkeit des $H^s(\mathcal{M})$ zu zeigen.

Sei $(u_1, u_2, \dots) \subset H^s(\mathcal{M})$ eine Cauchyfolge bezüglich der vom Skalarprodukt induzierten Norm. Dann ist $((\kappa_j^{-1})^*(\varphi_j u_m))_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im $H^s(\tilde{U}_j)$, hat also einen Grenzwert $(\kappa_j^{-1})^* v \in H^s(\tilde{U}_j)$. Wir bekommen insbesondere Konvergenz der Folge $(\varphi_j u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen v in der Topologie von $\mathcal{E}'(U_j)$.

Wir setzen jetzt $u = \sum_j v_j$ und haben noch die Konvergenz $\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{H^s(\mathcal{M})} = 0$ zu zeigen. Nun ist aber

$$\|u_m - u\|^2_{H^s(\mathcal{M})} = \sum_j \left\|(\kappa_j^{-1})^*(\varphi_j u_m - \varphi_j u)\right\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)},$$

also ist zu zeigen, daß jeder Summand nach Null strebt. Nach Konstruktion der φ_j reicht zu zeigen, daß $v_j = \varphi_j u$. Man mache sich dazu klar, daß $u_m \to u$ für $m \to \infty$ in der Topologie von $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$. Dann folgt auch $\varphi_j u_m \to \varphi_j u$, ebenfalls in der Topologie von $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$. Andererseits strebt $\varphi_j u_m$ nach v_j, in $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$. □

Satz 6.31. *Die Topologie von $H^s(\mathcal{M})$ hängt nicht von der Wahl der U_j, φ_j, κ_j ab.*

Beweis. Siehe [13]. □

Weiterhin erkennt man:

- Es ist $\Psi^m_{\mathrm{cl}}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{L}(H^{s+m}(\mathcal{M}), H^s(\mathcal{M}))$ für alle $s, m \in \mathbb{R}$.
- Wenn $\mathcal{A} \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(\mathcal{M})$ mit $m < 0$, dann ist die Abbildung $\mathcal{A}\colon L^2(\mathcal{M}) \to L^2(\mathcal{M})$ kompakt.

Schließlich haben wir noch:

Lemma 6.32 (Einbettungssatz von Sobolev). *Sei $s > n/2 + k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die Einbettung $H^s(\mathcal{M}) \hookrightarrow C^k(\mathcal{M})$ für allgemeine $\mathcal{M}$ stetig, und für kompakte $\mathcal{M}$ kompakt.*

Beweisskizze. Für $k = 0$ und $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ war das eine Hausaufgabe (Blatt 4). □

Zum Abschluß betrachten wir Dualitätsfragen. Dazu legen wir auf $\mathcal{M}$ ein Lebesgue–Maß $\mathrm{d}\mu$ fest und haben dann eine Bilinearform (ohne Subskript)

$$\langle u, v\rangle := \int_{\mathcal{M}} u(x)v(x)\,\mathrm{d}\mu(x), \qquad \forall u, v \in C^\infty(\mathcal{M}) = C_0^\infty(\mathcal{M}),$$

die offensichtlich stetig fortgesetzt werden kann zu einer Bilinearform auf $L^2(\mathcal{M}) \times L^2(\mathcal{M})$, für die wir dieselbe Notation benutzen werden.

Satz 6.33. *Für jedes $s \in \mathbb{R}$ kann man diese Bilinearform (in jedem Faktor) stetig fortsetzen zu einer Bilinearform (mit Subskript)*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^s(\mathcal{M})\times H^{-s}(\mathcal{M})} : H^s(\mathcal{M}) \times H^{-s}(\mathcal{M}) \to \mathbb{C}.$$

Für jedes $u' \in (H^{-s}(\mathcal{M}))'$ gibt es ein $u_+ \in H^s(\mathcal{M})$, sodaß gilt:

$$\langle u', v\rangle_{(H^{-s}(\mathcal{M}))'\times H^{-s}(\mathcal{M})} = \langle u_+, v\rangle_{H^s(\mathcal{M})\times H^{-s}(\mathcal{M})}, \qquad \forall v \in H^{-s}(\mathcal{M}).$$

Die Abbildung $u' \mapsto u_+$ ist invertierbar und stetig als Abbildung von $(H^{-s}(\mathcal{M}))'$ nach $H^s(\mathcal{M})$.

Beweis. Wir präzisieren die Wahl der Operatoren Λ_s. Sei $\Lambda_0 = I$. Für $s > 0$ ersetzen wir Λ_s durch $\frac{1}{2}(\Lambda_s + \Lambda_s^t)$, was dasselbe Hauptsymbol wie Λ_s hat, und wir bekommen

$$\langle \Lambda_s u, v\rangle = \langle u, \Lambda_s v\rangle, \qquad u, v \in C^\infty(\mathcal{M}), \qquad s \geq 0.$$

Für $s < 0$ definieren wir Λ_s' als Parametrix zu Λ_{-s} und setzen dann $\Lambda_s := \frac{1}{2}(\Lambda_s' + (\Lambda_s')^t)$. Dann haben wir

$$\langle \Lambda_s u, v\rangle = \langle u, \Lambda_s v\rangle, \qquad u, v \in C^\infty(\mathcal{M}), \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Seien nun $u, v \in C^\infty(\mathcal{M})$. Dann haben wir $u = \Lambda_s \Lambda_{-s} u - R_s u$ und somit auch

$$\langle u, v\rangle = \langle \Lambda_{-s} u, \Lambda_s v\rangle - \langle R_s u, v\rangle.$$

Die rechte Seite ergibt auch Sinn für $u \in H^s(\mathcal{M})$ und $v \in H^{-s}(\mathcal{M})$, und wir definieren dann die Fortsetzung $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^s(\mathcal{M})\times H^{-s}(\mathcal{M})}$ über die dichten Einbettungen $C^\infty(\mathcal{M}) \hookrightarrow H^{\pm s}(\mathcal{M})$.

Sei nun $u' \in (H^{-s}(\mathcal{M}))'$ gegeben und $u_+ \in H^s(\mathcal{M})$ gesucht. Wegen der dichten Einbettung $C^\infty(\mathcal{M}) \hookrightarrow H^{-s}(\mathcal{M})$ können wir das Funktional u' auf $C^\infty(\mathcal{M})$ einschränken, und wir finden ein eindeutig bestimmtes $u_+ \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$ mit

$$\langle u', v\rangle_{(H^{-s}(\mathcal{M}))'\times H^{-s}(\mathcal{M})} = \langle u_+, v\rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{M})\times\mathcal{D}(\mathcal{M})}, \qquad \forall v \in C^\infty(\mathcal{M}).$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß $u_+ \in H^s(\mathcal{M})$ ist. Für $v \in C^\infty(\mathcal{M})$ ist

$$\langle \Lambda_s u_+, v\rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{M})\times\mathcal{D}(\mathcal{M})} = \langle u_+, \Lambda_s v\rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{M})\times\mathcal{D}(\mathcal{M})} = \langle u', \Lambda_s\rangle_{(H^{-s}(\mathcal{M}))'\times H^{-s}(\mathcal{M})}.$$

Nun ist $\Lambda_s\colon L^2(\mathcal{M}) \to H^{-s}(\mathcal{M})$ stetig, und somit

$$\begin{aligned}\left|\langle \Lambda_s u_+, v\rangle_{\mathcal{D}'(\mathcal{M})\times\mathcal{D}(\mathcal{M})}\right| &\leq \|u'\|_{(H^{-s}(\mathcal{M}))'} \cdot \|\Lambda_s v\|_{H^{-s}(\mathcal{M})} \\ &\leq C_0 \|u'\|_{(H^{-s}(\mathcal{M}))'} \cdot \|v\|_{L^2(\mathcal{M})},\end{aligned}$$

also ist $\Lambda_s u_+$ ein lineares Funktional auf $L^2(\mathcal{M})$, ist also nach dem Darstellungssatz von Riesz gleich einer Funktion aus dem $L^2(\mathcal{M})$. Das bedeutet $u_+ \in H^s(\mathcal{M})$. Weiterhin haben wir

$$\|\Lambda_s u_+\|_{L^2(\mathcal{M})} \leq C_0 \|u'\|_{(H^{-s}(\mathcal{M}))'},$$

also die Stetigkeit der Abbildung $u' \mapsto u_+$. $\square$

Kapitel 7

Spektraltheorie

7.1 Das Spektrum kompakter symmetrischer Operatoren

Seien X und Y Banachräume. Ein Operator $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(X,Y)$ (also linear und stetig) heißt kompakt, wenn er beschränkte Mengen auf präkompakte Mengen abbildet.

Die folgenden beiden Ergebnisse beweisen sich fast von selbst.

Lemma 7.1. *Sei $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(X,Y)$ und $\dim Y < \infty$. Dann ist $\mathcal{A}$ kompakt.*

Lemma 7.2. *Seien X, Y, Z Banachräume und $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(X,Y)$ sowie $\mathcal{B} \in \mathfrak{L}(Y,Z)$. Wenn einer von beiden kompakt ist, dann auch die Komposition $\mathcal{B} \circ \mathcal{A} \in \mathfrak{L}(X,Z)$.*

Lemma 7.3. *Seien $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2, \dots$ kompakte Operatoren aus $\mathfrak{L}(X,Y)$, und sei $\mathcal{A}$ der Grenzwert in der Operatornorm:*

$$\lim_{j\to\infty} \|\mathcal{A}_j - \mathcal{A}\|_{\mathfrak{L}(X,Y)} = 0.$$

Dann ist auch $\mathcal{A}$ kompakt.

Beweis. Sei $(x_1, x_2, \dots) \subset X$ eine beschränkte Folge.

Es gibt eine Teilfolge $(x_1^1, x_2^1, \dots) \subset (x_1, x_2, \dots)$, sodaß $(\mathcal{A}_1 x_1^1, \mathcal{A}_1 x_2^1, \dots)$ in Y konvergiert.

Es gibt eine Teilfolge $(x_1^2, x_2^2, \dots) \subset (x_1^1, x_2^1, \dots)$, sodaß $(\mathcal{A}_2 x_1^2, \mathcal{A}_2 x_2^2, \dots)$ in Y konvergiert.

Es gibt eine Teilfolge $(x_1^3, x_2^3, \dots) \subset (x_1^2, x_2^2, \dots)$, sodaß $(\mathcal{A}_3 x_1^3, \mathcal{A}_3 x_2^3, \dots)$ in Y konvergiert.

Usw. Anschließend wählen wir eine Diagonalfolge $(z_1, z_2, \dots)$ gemäß $z_j = x_j^j$ und stellen fest, daß $(\mathcal{A}_n z_1, \mathcal{A}_n z_2, \dots)$ in Y konvergiert, für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $(\mathcal{A} z_1, \mathcal{A} z_2, \dots)$ eine Cauchyfolge in Y, denn es ist

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A} z_n - \mathcal{A} z_m\|_Y &\le \|\mathcal{A} z_n - \mathcal{A}_l z_n\|_Y + \|\mathcal{A}_l z_n - \mathcal{A}_l z_m\|_Y + \|\mathcal{A}_l z_m - \mathcal{A} z_m\|_Y \\
&\le \|\mathcal{A} - \mathcal{A}_l\|_{\mathfrak{L}} \|z_n\|_X + \|\mathcal{A}_l z_n - \mathcal{A}_l z_m\|_Y + \|\mathcal{A}_l - \mathcal{A}\|_{\mathfrak{L}} \|z_m\|_X \\
&\le 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

wenn n, m, l groß genug gewählt werden. □

Definition 7.4. *Sei X ein Hilbertraum. Ein Operator $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(X,X)$ heißt* ausgeartet*, wenn es endlich viele a_j, $b_j \in X$ gibt mit*

$$\mathcal{A} x = \sum_{j=1}^{k} \langle x, a_j \rangle \, b_j, \qquad \forall x \in X.$$

Offensichtlich sind ausgeartete Operatoren nuklear.

Wir können annehmen, daß die $(a_1, \dots, a_k)$ linear unabhängig sind, und die $(b_1, \dots, b_k)$ auch.

Wegen $\dim \operatorname{img} A < \infty$ sind ausgeartete Operatoren auch kompakt.

Satz 7.5. *Sei X ein Hilbertraum und $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(X,X)$. Dann gilt:*

$\mathcal{A}$ ist kompakt genau dann, wenn es zu jedem positiven ε einen ausgearteten Operator $\mathcal{A}_\varepsilon$ gibt mit $\|\mathcal{A}_\varepsilon - \mathcal{A}\|_{\mathfrak{L}(X,X)} \le \varepsilon$.

Beweis. Die Rückrichtung ist nach unseren vorigen Überlegungen klar.

Sei nun $\mathcal{A}$ kompakt. Sei $B = \{x \in X \colon \|x\|_X \le 1\}$ die Einheitskugel, und sei $M = \mathcal{A}(B)$ das Bild der Einheitskugel in X. Dann ist $\overline{M}$ kompakt in X, kann also überdeckt werden durch endlich viele Kugeln vom Radius $< \varepsilon$. Die Mittelpunkte dieser Kugeln seien $y_1, \dots, y_m$. Seien $w_1, \dots, w_k$ mit $k \le m$ die Vektoren einer Orthonormalbasis für $\operatorname{span}(y_1, \dots, y_m)$. Dann haben wir, für jedes $y \in \overline{M}$,

$$\left\| y - \sum_{j=1}^k \langle y, w_j \rangle w_j \right\|_X < \varepsilon.$$

Nun setzen wir $\mathcal{A}_\varepsilon x = \sum_{j=1}^k \langle \mathcal{A}x, w_j \rangle w_j = \sum_{j=1}^m \langle x, \mathcal{A}^* w_j \rangle w_j$, also ist $\mathcal{A}_\varepsilon$ ausgeartet, und für $\|x\|_X \le 1$ haben wir auch $\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}_\varepsilon x\|_X \le \varepsilon$. □

Satz 7.6 (Alternative von Fredholm). *Sei $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(X,X)$ kompakt, X ein Hilbertraum, und $T := I - \mathcal{A}$. Dann gilt genau eine der beiden folgenden Aussagen*[1]*:*

- $\ker T = \{0\}$ *und* $\operatorname{img} T = X$,
- $\ker T \ne \{0\}$ *und* $\dim \ker T = \dim \ker T^* < \infty$, *und es gilt weiterhin: das Problem $Tx = y$ mit gegebenem $y \in X$ ist lösbar, genau dann wenn $y \perp \ker(T^*)$.*

Wir merken uns das als: „surjektiv impliziert injektiv (und umgekehrt)".

Der erste Teil und die Dimensionsaussage des zweiten Teils gelten auch im Falle eines allgemeinen Banachraums X.

Beweis. Nimm $\varepsilon = 1/2$ und wähle ein passendes $\mathcal{A}_\varepsilon$. Dann ist $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\varepsilon + R$ mit $\|R\|_{\mathfrak{L}(X,X)} \le 1/2$, also existiert $S := (I - R)^{-1} = \sum_j R^j \in \mathfrak{L}(X,X)$.

Nun haben wir

$$\begin{aligned}
Tx = y &\Longleftrightarrow (I - R)x - \mathcal{A}_\varepsilon x = y \\
&\Longleftrightarrow x - S\mathcal{A}_\varepsilon x = Sy \\
&\Longleftrightarrow x - S \sum_{j=1}^m \langle x, a_j \rangle b_j = Sy \\
&\Longleftrightarrow x - \sum_{j=1}^m \langle x, a_j \rangle Sb_j = Sy \\
&\Longrightarrow \langle x, a_i \rangle - \sum_{j=1}^m \langle Sb_j, a_i \rangle \langle x, a_j \rangle = \langle Sy, a_i \rangle, \qquad \forall i = 1, 2, \dots, m.
\end{aligned}$$

Wenn es ein solches x gibt, dann setzen wir $\xi_j = \langle x, a_j \rangle$. Weiterhin sei $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ eine Matrix mit Einträgen $A_{ij} = \langle Sb_j, a_i \rangle$. Dann haben wir

$$(I_m - A) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle Sy, a_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle Sy, a_m \rangle \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

Und wenn $\xi \in \mathbb{C}^m$ eine Lösung von (7.1) ist, dann ist $x = Sy + \sum_{j=1}^m \xi_j Sb_j$ eine Lösung von $Tx = y$.

Wir wiederholen mit T^*. Dann ist $T^* = I - \mathcal{A}_\varepsilon^* - R^*$ mit

$$\mathcal{A}_\varepsilon^* y = \sum_{j=1}^m \langle y, b_j \rangle a_j, \qquad y \in X.$$

[1] Man überlege sich, was dieser Satz im Fall $X = \mathbb{C}^m$ eigentlich aussagt.

Aus der Funktionalanalysis ist bekannt, daß $\|R^*\|_{\mathfrak{L}(X,X)} = \|R\|_{\mathfrak{L}(X,X)} \le 1/2$, also existiert $(I - R^*)^{-1}$ und ist sogar gleich $S^* = ((I - R)^{-1})^*$, wie man nachrechnet. Und wie oben zeigt man, daß

$$\begin{aligned} T^*y = x \Longleftrightarrow y - \sum_{j=1}^m \langle y, b_j \rangle S^* a_j = S^* x \\ \Longrightarrow \langle y, b_i \rangle - \sum_{j=1}^m \overline{\langle S b_i, a_j \rangle} \langle y, b_j \rangle = \langle S^* x, b_i \rangle, \qquad \forall i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Wenn es eine Lösung y gibt, dann setzen wir $\eta_j = \langle y, b_j \rangle$. Dann haben wir

$$(I_m - A^*) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle S^* x, b_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle S^* x, b_m \rangle \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

Und wenn $\eta \in \mathbb{C}^m$ eine Lösung von (7.2) ist, dann ist $y = S^*x + \sum_{j=1}^m \eta_j S^* a_j$ eine Lösung von $T^*y = x$. Nun rechnet man nach, daß $\dim \ker T = \dim \ker(I_m - A) = \dim \ker(I_m - A^*) = \dim \ker T^*$. Wenn $\dim \ker T = 0$, dann ist das System (7.1) eindeutig lösbar für jede rechte Seite aus dem $\mathbb{C}^m$, also ist dann T auch surjektiv.

Sei nun $\dim \ker T \neq 0$. Dann ist (nach einem bekannten Ergebnis aus der linearen Algebra) (7.1) lösbar genau dann, wenn die rechte Seite von (7.1) senkrecht steht auf $\ker(I_m - A^*)$. Das bedeutet

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \langle Sy, a_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle Sy, a_m \rangle \end{pmatrix} \perp \ker(I_m - A^*) \\ \Longleftrightarrow &\sum_{j=1}^m \langle Sy, a_j \rangle \overline{\eta_j} = 0 \qquad \forall \eta \in \mathbb{C}^m \text{ mit } (I_m - A^*)\eta = 0 \\ \Longleftrightarrow &\left\langle y, \sum_{j=1}^m (S^* a_j) \eta_j \right\rangle = 0 \qquad \forall \eta \in \mathbb{C}^m \text{ mit } (I_m - A^*)\eta = 0 \\ \Longleftrightarrow &\, y \perp \ker T^*. \end{aligned}$$

□

Wir wiederholen aus der Funktionalanalysis: Seien X, Y Banachräume, $P \in \mathfrak{L}(X, Y)$, und P sei bijektiv. Dann ist P^{-1} ebenfalls stetig, also $P^{-1} \in \mathfrak{L}(Y, X)$.

Definition 7.7 (Resolventenmenge, Spektrum). *Sei X ein Banachraum und $P \in \mathfrak{L}(X, X)$. Dann nennen wir*

$$\varrho(P) := \{\lambda \in \mathbb{C} \colon P - \lambda I \in \mathfrak{L}(X, X) \text{ bijektiv}\}$$

die Resolventenmenge von P, *und* $\sigma(P) := \mathbb{C} \setminus \varrho(P)$ *heißt das* Spektrum von P.

Für $\lambda \in \varrho(P)$ heißt der (dann stetige) Operator $(P - \lambda I)^{-1}$ die Resolvente von P.

Aus der Neumannschen Reihe kann man herausholen, daß die Resolventenmenge eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist. Für die Elemente $\lambda \in \varrho(P)$ verhält sich $P - \lambda I$ vergleichsweise übersichtlich (nämlich als topologischer Isomorphismus). Die Frage, was hingegen im Spektrum passiert, wird (für schöne Operatoren) im nächsten Satz beantwortet:

Satz 7.8. *Sei X ein Hilbertraum, $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(X, X)$ kompakt und symmetrisch, das heißt*

$$\langle \mathcal{A}x, y \rangle = \langle x, \mathcal{A}y \rangle, \qquad \forall x, y \in X.$$

Sei $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ sowie $\lambda \neq 0$. Dann ist λ ein Eigenwert endlicher Vielfachheit mit $|\lambda| \le \|\mathcal{A}\|_{\mathfrak{L}(X,X)}$.

Beweis. Sei $\mu = 1/\lambda$. Dann ist $\mathcal{A}-\lambda I = -\lambda(I-\mu\mathcal{A})$, und hierauf können wir die Fredholmsche Alternative anwenden. □

Die Null ist ein besonderer Wert des Spektrums (und könnte z.B. ein Eigenwert unendlicher Vielfachheit sein, wie man an ausgearteten Operatoren sieht).

Wie in der linearen Algebra beweist man, daß Eigenwerte symmetrischer Operatoren reell sein müssen, und daß Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander stehen.

Lemma 7.9. *Sei X ein Hilbertraum, $A \in \mathfrak{L}(X,X)$ kompakt und symmetrisch, und sei $\mathcal{A}$ nicht gleich dem Nulloperator. Dann gehört eine der beiden Zahlen $\pm \|\mathcal{A}\|_{\mathfrak{L}(X,X)} \in \mathbb{R}$ zum Spektrum von $\mathcal{A}$.*

Beweis. Man konsultiere ein Buch zur Funktionalanalysis. □

Weiterhin haben wir:

Lemma 7.10. *Ein kompakter und symmetrischer Operator $\mathcal{A}$ auf einem Hilbertraum X hat höchstens abzählbar viele Eigenwerte (Vielfachheiten entsprechend mitgezählt), und diese können sich höchstens im Nullpunkt häufen.*

Beweis. Sei $(e_1, e_2, \dots)$ eine Folgen von Eigenvektoren mit $\|e_j\|_X = 1$ und $\mathcal{A}e_j = \lambda_j e_j$ sowie $\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \lambda^* \neq 0$. Wir können annehmen, daß $\langle e_j, e_k\rangle_X = \delta_{jk}$. Wegen der Kompaktheit von $\mathcal{A}$ hat die Folge $(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \dots)$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert y^*. Wir lassen alle Folgenglieder weg, die nicht zu dieser Teilfolge gehören, und numerieren den Rest um. Dann haben wir

$$\lim_{j\to\infty} e_j = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\lambda_j}\mathcal{A}e_j = \frac{1}{\lambda^*}y^*.$$

Andererseits ist $\|e_j - e_k\|_X = \sqrt{2}\delta_{jk}$, was ein Widerspruch ist.

Die Abzählbarkeit der Menge der Eigenwerte folgt unmittelbar. □

Nun sei $(e_1, e_2, \dots)$ die Folge aller linear unabhängigen Eigenvektoren von $\mathcal{A}$ auf X. Wir setzen $Z = \operatorname{span}(e_1, e_2, \dots)$ als algebraischen Unterraum von X. Dann ist $Z^\perp$ ein in der Normtopologie abgeschlossener Unterraum von X. Wir studieren die Wirkung von $\mathcal{A}$ auf $Z^\perp$. Sei also $y \in Z^\perp$. Dann ist $\langle y, e_j\rangle = 0$ für alle j, also auch

$$\langle \mathcal{A}y, e_j\rangle = \langle y, \mathcal{A}e_j\rangle = \langle y, \lambda_j e_j\rangle = 0,$$

also bildet $\mathcal{A}$ den Raum $Z^\perp$ in sich ab. Man stellt fest, daß $\mathcal{A}_{|Z^\perp}$ stetig, kompakt und symmetrisch ist. Wenn nun $\mathcal{A}_{|Z^\perp}$ ungleich dem Nulloperator wäre, dann wäre eine der beiden Zahlen $\pm \left\|\mathcal{A}_{|Z^\perp}\right\|_{\mathfrak{L}} \neq 0$ im Spektrum von $\sigma(\mathcal{A}_{|Z^\perp})$, also ein Eigenwert, also hätte $\mathcal{A}$ einen zusätzlichen Eigenvektor, was unmöglich ist. Also muß $Z^\perp = \ker \mathcal{A}$ sein.

Insgesamt können wir zeigen:

Satz 7.11. *Sei X ein Hilbertraum, $\dim X = \infty$, $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(X,X)$ sei symmetrisch und kompakt. Dann gilt:*

- *der Raum $(\ker \mathcal{A})^\perp$ hat eine Orthonormalbasis $(e_1, e_2, \dots)$ von Eigenvektoren (mit zugehörigen Eigenwerten λ_j), und es ist*

$$\mathcal{A}x = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j \langle x, e_j\rangle e_j, \qquad \forall x \in X.$$

- *Sei P_0 der Orthogonalprojektor auf $\ker \mathcal{A}$. Dann ist*

$$x = P_0 x + \sum_{j=1}^\infty \langle x, e_j\rangle e_j, \qquad \forall x \in X.$$

7.2 Fredholmtheorie

Wir wollen die Ergebnisse des vorigen Abschnitts in einen allgemeineren Kontext stellen. Siehe auch [13] oder [8, Kapitel 19].

Definition 7.12 (Kokern). *Seien X und Y Banachräume, $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(X, Y)$. Dann definieren wir*

$$\operatorname{coker} \mathcal{A} = Y / \operatorname{img} \mathcal{A}$$

als algebraischen Vektorraum.

Wenn wir diesen Raum mit einer Norm ausstatten wollen, sollte $\operatorname{img} \mathcal{A}$ ein abgeschlossener Unterraum von Y sein, was wir aber noch nicht wissen.

Lemma 7.13. *Wenn $\dim \operatorname{coker} \mathcal{A} < \infty$, dann ist $\operatorname{img} \mathcal{A}$ abgeschlossen.*

Beweis. Es ist $\ker \mathcal{A}$ abgeschlossener Unterraum von X, also können wir den algebraischen Unterraum

$$\tilde{X} := X / \ker \mathcal{A}$$

mit einer Norm

$$\|[x]\|_{\tilde{X}} := \inf \{\|x - x_0\|_X : x_0 \in \ker \mathcal{A}\}$$

ausstatten und bekommen einen Banachraum. Dann bekommen wir in natürlicher Weise einen Operator $\tilde{\mathcal{A}} \colon \tilde{X} \to Y$ mit $\operatorname{img} \tilde{\mathcal{A}} = \operatorname{img} \mathcal{A}$ und $\ker \tilde{\mathcal{A}} = \{0\}$. Sei $\tilde{Y}$ ein zu $\operatorname{img} \mathcal{A}$ komplementärer Unterraum (vgl. Satz A.39) von Y, also

$$Y = \operatorname{img} \mathcal{A} \oplus \tilde{Y}, \qquad \dim \tilde{Y} = \dim \operatorname{coker} \mathcal{A} < \infty.$$

Nun wählen wir eine weitere Abbildung

$$\hat{\mathcal{A}} \colon \tilde{X} \oplus \tilde{Y} \to Y,$$
$$\hat{\mathcal{A}} \colon ([x], \tilde{y}) \mapsto \tilde{\mathcal{A}}[x] + \tilde{y},$$

die offensichtlich bijektiv ist. Wir statten $\tilde{X} \oplus \tilde{Y}$ mit einer Norm $\|[x]\|_{\tilde{X}} + \|\tilde{y}\|_{\tilde{Y}}$ aus und stellen fest, daß $\hat{\mathcal{A}}$ stetig ist. Also ist auch $\hat{\mathcal{A}}^{-1}$ stetig, bildet also Cauchyfolgen in Y auf Cauchyfolgen in $\tilde{X} \oplus \tilde{Y}$ ab, was aber ein Banachraum ist. Also ist $\operatorname{img} \tilde{\mathcal{A}}$ abgeschlossen. □

Definition 7.14 (Fredholm–Operatoren, Index). *Seien X und Y Banachräume und $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(X, Y)$. Dann heißt $\mathcal{A}$ ein* Fredholm–Operator*, wenn $\dim \ker \mathcal{A} < \infty$ und $\dim \operatorname{coker} \mathcal{A} < \infty$. Weiterhin nennen wir*

$$\operatorname{index} \mathcal{A} := \dim \ker \mathcal{A} - \dim \operatorname{coker} \mathcal{A}$$

den Index *von $\mathcal{A}$. Die Klasse der Fredholmoperatoren von X nach Y bezeichnen wir mit $\mathcal{F}(X, Y)$.*

Ein Grund für diese Begriffswahl ist der folgende: man hätte gern geometrische Größen, die bei sinnvoller Störung eines Operators $\mathcal{A}$ sich nicht ändern. Seien z.B. $X = Y = \mathbb{R}^2$, und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_\varepsilon$ erzeugt durch die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\|\mathcal{A} - \mathcal{A}_\varepsilon\| = |\varepsilon|$ in der Operatornorm, aber $\dim \ker \mathcal{A} = 1$ und $\dim \ker \mathcal{A}_\varepsilon = 2$ für $\varepsilon \neq 0$. Analog ist auch $1 = \dim \operatorname{coker} \mathcal{A} \neq \dim \operatorname{coker} \mathcal{A}_\varepsilon = 0$, obwohl $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_\varepsilon$ „nahe beieinander“ sind. Aber $\operatorname{index} \mathcal{A} = \operatorname{index} \mathcal{A}_\varepsilon$, weshalb wir im Folgenden der Frage nachgehen wollen, ob der Index auch für allgemeinere Banachräume X, Y stetig vom Operator abhängt.

Lemma 7.15. *Wenn $\dim \operatorname{coker} \mathcal{A} < \infty$, dann ist $\dim \operatorname{coker} \mathcal{A} = \dim \ker \mathcal{A}^*$, wobei $\mathcal{A}^* \colon Y' \to X'$ den adjungierten Operator bezeichnet.*

Beweis. Zunächst ist

$$\begin{aligned}\ker \mathcal{A}^* &:= \{y' \in Y' \colon \mathcal{A}^* y' = 0 \in X'\} = \left\{y' \in Y' \colon \langle \mathcal{A}^* y', x\rangle_{X' \times X} = 0 \quad \forall x \in X\right\} \\ &= \left\{y' \in Y' \colon \langle y', \mathcal{A}x\rangle_{Y' \times Y} = 0 \quad \forall x \in X\right\}.\end{aligned}$$

Wir zerlegen Y gemäß $Y = \operatorname{img} \mathcal{A} \oplus \tilde{Y}$ mit $\dim \tilde{Y} = \dim \operatorname{coker} \mathcal{A} = m$. Sei $(y_1, \ldots, y_m)$ eine Basis für $\tilde{Y}$.

Sei nun $y' \in \ker \mathcal{A}^*$ fest und $y \in Y$ beliebig. Dann haben wir eine eindeutige Darstellung von y als $y = \mathcal{A}x + \sum_{j=1}^m \alpha_j y_j$, und das Verhalten des Funktionals y' wird ausschließlich bestimmt von den Werten $\langle y', y_j\rangle$, also haben wir $\dim \ker \mathcal{A}^* \leq m$.

Andererseits liefert der Satz von Hahn–Banach uns für jedes j ein Funktional $y'_j \in Y'$ mit

$$\langle y'_j, y\rangle = \begin{cases} 0 & : y \in \operatorname{img} \mathcal{A} \oplus \operatorname{span}(y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots y_m), \\ 1 & : y = y_j. \end{cases}$$

Diese m Funktionale gehören zu $\ker \mathcal{A}^*$ und sind linear unabhängig, also $\dim \ker \mathcal{A}^* \geq m$. □

Folgerung 7.16. *Sei X ein Hilbertraum und $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(X, X)$ kompakt. Dann ist* $\operatorname{index}(I - \mathcal{A}) = 0$.

Lemma 7.17. *Sei $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(X, Y)$, dann existiert ein $\mathcal{B} \in \mathcal{F}(Y, X)$ mit*

$$\mathcal{B}\mathcal{A} = I - P_1, \qquad \mathcal{A}\mathcal{B} = I - P_2,$$

wobei $P_1 \in \mathfrak{L}(X, X)$ auf $\ker \mathcal{A}$ *projiziert, und $(I - P_2) \in \mathfrak{L}(Y, Y)$ projiziert auf* $\operatorname{img} \mathcal{A}$.

Beweis. Schreibe $X = \ker \mathcal{A} \oplus \tilde{X}$ und $Y = \operatorname{img} \mathcal{A} \oplus \tilde{Y}$ mit abgeschlossenen Unterräumen $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$, wobei $\dim \tilde{Y} < \infty$. Definiere einen Operator $\mathcal{B}$ anhand der Bedingungen $\mathcal{B}_{|\tilde{Y}} = 0$ und $(\mathcal{B}\mathcal{A})_{|\tilde{X}} = I_{|\tilde{X}}$. Dann ist $\mathcal{B} \in \mathfrak{L}(Y, X)$ linear und stetig, $\ker \mathcal{B} = \tilde{Y}$ und $\operatorname{img} \mathcal{B} = \tilde{X}$, also ist $\mathcal{B}$ auch fredholm. □

Satz 7.18. *Sei $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(X, Y)$. Dann gilt: $\mathcal{A}$ ist fredholm genau dann, wenn es Operatoren $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathfrak{L}(Y, X)$ gibt mit*

$$\mathcal{B}_1\mathcal{A} = I + K_1, \qquad \mathcal{A}\mathcal{B}_2 = I + K_2,$$

und K_1, K_2 sind kompakte Operatoren auf X bzw. Y.

Beweis. Die eine Richtung haben wir schon gezeigt, denn Projektionsoperatoren mit endlichdimensionalem Bild sind kompakt.

Seien also solche $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ gegeben. Aus der ersten Bedingung folgt dann $\ker \mathcal{A} \subset \ker(I + K_1)$, das ist nach unseren Erkenntnissen aber endlich-dimensional.

Weiterhin folgt

$$\|x\|_X \leq \|\mathcal{B}_1\mathcal{A}x\|_x + \|K_1 x\|_X \leq C \|\mathcal{A}x\|_Y + \|\mathbb{K}_1 x\|_X.$$

Nach Satz A.47 ist dann $\operatorname{img} \mathcal{A}$ abgeschlossen. Aus der zweiten Bedingung folgt $\mathcal{A}(X) \supset \operatorname{img}(I + K_2)$, und wir wissen schon, daß $\operatorname{codim}(I + K_2) < \infty$.

Also ist $\mathcal{A}$ fredholm. □

Wegen $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_2 = K_1\mathcal{B}_2 - \mathcal{B}_1 K_2$ können wir $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ annehmen, denn ihre Differenz ist ein kompakter Operator. Solche Operatoren heißen auch *Fredholm–Inverse zu $\mathcal{A}$*.

Folgerung 7.19. *Kompakte Störungen von Fredholmoperatoren ergeben wieder Fredholmoperatoren.*

Folgerung 7.20. *Seien $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(X, Y)$ sowie $\mathcal{B} \in \mathcal{F}(Y, Z)$. Dann ist auch $\mathcal{B}\mathcal{A} \in \mathcal{F}(X, Z)$.*

Zum Beweis gebe man jeweils passende Fredholm–Inverse an.

Der Raum $\mathfrak{L}(X, X)$ ist eine Banachalgebra, und der Raum $\mathfrak{K}(X, X)$ der kompakten Operatoren ist ein Ideal darin, und zwar ein abgeschlossenes, wegen Lemma 7.3. Dann können wir die Quotientenalgebra

$$Q(X, X) := \mathfrak{L}(X, X)/\mathfrak{K}(X, X)$$

bilden, die wieder eine Banachalgebra ist, CALKIN–*Algebra* genannt.

Wir haben einen Algebra–Homomorphismus $\pi\colon \mathcal{L}(X,X) \to \mathcal{K}(X,X)$, der $\mathcal{A}$ auf $[\mathcal{A}]$ abbildet. Offensichtlich ist ein $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,X)$ fredholm genau dann, wenn das Bild $\pi(\mathcal{A})$ ein invertierbares Element von $Q(X,X)$ ist.

Damit können wir jetzt schnell zeigen:

Satz 7.21. *Die Menge $\mathcal{F}(X,Y)$ ist offen in $\mathcal{L}(X,Y)$.*

Beweis. Sei $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(X,Y)$, und $\mathcal{B} \in \mathcal{F}(Y,X)$ sei eine Fredholm-Inverse zu $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{B}\mathcal{A} = I + K_1, \qquad \mathcal{A}\mathcal{B} = I + K_2.$$

Sei $\tilde{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit $\left\|\tilde{A}\right\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le \varepsilon \ll 1$. Dann haben wir

$$\pi_X(\mathcal{B}(\mathcal{A}+\tilde{A})) = I + R_1, \qquad \pi_Y((\mathcal{A}+\tilde{A})\mathcal{B}) = I + R_2,$$

mit $\|R_1\|_{\mathcal{L}(X,X)} \le \|\mathcal{B}\|\,\varepsilon$ und $\|R_2\|_{\mathcal{L}(Y,Y)} \le \|\mathcal{B}\|\,\varepsilon$. Mittels Neumannscher Reihe erkennt man $I+R_1$ und $I+R_2$ als invertierbar in $Q(X,X)$ bzw. $Q(Y,Y)$. Also sind $I+R_1$ und $I+R_2$ fredholm in $\mathcal{L}(X,X)$ und $\mathcal{L}(Y,Y)$. Damit lassen sich Links-Fredholm-Inverse und Rechts-Fredholm-Inverse zu $\mathcal{A}+\tilde{A}$ direkt angeben, und somit ist auch $\mathcal{A}+\tilde{A} \in \mathcal{F}(X,Y)$. □

Satz 7.22. *Die Index–Abbildung*

$$\operatorname{index}\colon \mathcal{F}(X,Y) \to \mathbb{Z}$$

ist konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathcal{F}(X,Y)$.

Beweis. Sei $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(X,Y)$ fest gewählt, und $\mathcal{A}' \in \mathcal{F}(X,Y)$ sei variabel, mit $\|\mathcal{A}-\mathcal{A}'\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le \varepsilon \ll 1$. Wir zeigen, daß $\operatorname{index}\mathcal{A} = \operatorname{index}\mathcal{A}'$ für kleine ε.

Zunächst zerlegen wir

$$X = \ker\mathcal{A} \oplus \tilde{X}, \qquad Y = \operatorname{img}\mathcal{A} \oplus \tilde{Y},$$

mit abgeschlossenen Räumen $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$, wobei $\dim\tilde{Y} < \infty$. Wir statten $\tilde{X}\oplus\tilde{Y}$ mit der kanonischen Norm aus und erhalten einen Banachraum. Setze

$$\tau_{\mathcal{A}}\colon \tilde{X}\oplus\tilde{Y} \to Y, \qquad (x,y) \mapsto \mathcal{A}x + y.$$

Das ist ein stetiger Isomorphismus zwischen Banachräumen, also ist auch $\tau_{\mathcal{A}}^{-1}$ stetig.

Weiterhin definieren wir

$$\tau_{\mathcal{A}'}\colon \tilde{X}\oplus\tilde{Y} \to Y, \qquad (x,y) \mapsto \mathcal{A}'x + y,$$

und stellen fest, daß für alle $(x,y) \in \tilde{X}\oplus\tilde{Y}$ gilt:

$$\|\tau_{\mathcal{A}'}(x,y) - \tau_{\mathcal{A}}(x,y)\|_Y = \|\mathcal{A}'x - \mathcal{A}x\|_Y \le \varepsilon\,\|(x,y)\|_{\tilde{X}\oplus\tilde{Y}}\,.$$

Mittels Neumannscher Reihe können wir dann zeigen, daß auch $\tau_{\mathcal{A}'}$ ein stetiger Isomorphismus zwischen $\tilde{X}\oplus\tilde{Y}$ und Y ist, für kleines ε.

Nun ist $\tilde{X}$ ein abgeschlossener Unterraum von $\tilde{X}\oplus\tilde{Y}$, also ist auch $\tau_{\mathcal{A}'}(\tilde{X}) = \mathcal{A}'(\tilde{X})$ ein abgeschlossener Unterraum von Y. Und die Kodimensionen sind auch gleich, also

$$\operatorname{codim}\mathcal{A}'(\tilde{X}) = \dim\tilde{Y} = \operatorname{codim}\operatorname{img}\mathcal{A} = \dim\operatorname{coker}\mathcal{A}.$$

Weil $\tau_{\mathcal{A}'}$ ein Isomorphismus zwischen Banachräumen ist, haben wir weiterhin $\ker\mathcal{A}' \cap \tilde{X} = \{0\}$, also können wir schreiben

$$X = \ker\mathcal{A}' \oplus Z \oplus \tilde{X}$$

mit einem Raum $Z \subset X$ von endlicher Dimension. Zusammen mit unserer ersten Zerlegung von X bekommen wir damit

$$\dim \ker \mathcal{A} = \dim \ker \mathcal{A}' + \dim Z.$$

Nun ist $\mathcal{A}'$ injektiv auf $Z \oplus \tilde{X}$, und dies wird von $\mathcal{A}'$ abgebildet auf $\mathcal{A}'(X) = \mathcal{A}'(Z) \oplus \mathcal{A}'(\tilde{X})$, und $\mathcal{A}'(X)$ ist abgeschlossen in Y, mit endlicher Kodimension. Also haben wir

$$\operatorname{codim} \mathcal{A}'(X) = \operatorname{codim} \mathcal{A}'(\tilde{X}) - \dim \mathcal{A}'(Z) = \operatorname{codim} \mathcal{A}(X) - \dim Z,$$

oder auch

$$\dim \operatorname{coker} \mathcal{A} = \dim \operatorname{coker} \mathcal{A}' + \dim Z.$$

Zusammen mit obiger Aussage über die Dimensionen der Kerne folgt die Behauptung. □

Folgerung 7.23. *Kompakte Störungen eines Fredholmoperators verändern den Index nicht.*

Zum Beweis verbinde man $\mathcal{A}$ mit seiner Störung $\mathcal{A} + K$ homotop durch die Kurve $s \mapsto \mathcal{A} + sK$, wobei $s \in [0, 1]$.

Satz 7.24. *Seien $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(X, Y)$ und $\mathcal{B} \in \mathcal{F}(Y, Z)$. Dann ist* $\operatorname{index}(\mathcal{BA}) = \operatorname{index} \mathcal{A} + \operatorname{index} \mathcal{B}$.

Beweis. In $\mathcal{L}(X \oplus Y, Y \oplus Z)$ betrachten wir die Familie von Operatoren

$$\begin{pmatrix} I_y & 0 \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & I_y \end{pmatrix},$$

was für jedes t einen Fredholmoperator ergibt. Für $t = 0$ hat dieser als Index den Wert $\operatorname{index} \mathcal{A} + \operatorname{index} \mathcal{B}$, und für $t = \pi/2$ hat dieser als Index den Wert $\operatorname{index}(\mathcal{BA})$. □

Wir wenden diese Ergebnisse an:

Theorem 7.25. *Sei $\mathcal{M}$ eine kompakte geschlossene Mannigfaltigkeit, $\mathcal{A} \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(\mathcal{M})$ mit $m \in \mathbb{R}$. Für $s \in \mathbb{R}$ setzen wir $\mathcal{A}_s := \mathcal{A}_{|H^{s+m}(\mathbb{R})} \in \mathcal{L}(H^{s+m}(\mathcal{M}), H^s(\mathcal{M}))$. Dann gilt*

- $\mathcal{A}_s \in \mathcal{F}(H^{s+m}(\mathcal{M}), H^s(\mathcal{M}))$,
- $\ker \mathcal{A}_s \subset C^\infty(\mathcal{M})$, *und* $\ker \mathcal{A}_s$ *ist unabhängig von s,*
- $\operatorname{index} \mathcal{A}_s$ *ist unabhängig von s, und* $\operatorname{index} \mathcal{A} = \dim \ker \mathcal{A} - \dim \ker \mathcal{A}^*$, *wobei $\mathcal{A}^*$ der formal adjungierte Operator zu $\mathcal{A}$ ist, definiert anhand eines Skalarprodukts in $L^2(\mathcal{M})$ nach Festlegung einer Dichte,*
- *wenn $R \in \Psi^r_{\mathrm{cl}}(\mathcal{M})$ mit $r < m$, dann ist* $\operatorname{index}(\mathcal{A} + R) = \operatorname{index}(\mathcal{A})$.

Beweis. Elliptische Operatoren haben Parametrizes, und diese sind dann auch die gesuchten Fredholm–Inversen. Wegen $\text{sing-supp}(\mathcal{A}u) = \text{sing-supp}(u)$ für jedes $u \in \mathcal{E}'(\mathcal{M})$ und elliptisches $\mathcal{A}$ haben wir auch die Aussagen über die Kerne. Schließlich ist $R \in \Psi^r_{\mathrm{cl}}(\mathcal{M})$ mit $r < m$ ein kompakter Operator von $H^{s+m}(\mathcal{M})$ nach $H^s(\mathcal{M})$. □

Wir merken an, daß dieser Satz auch für Systeme und Operatoren auf Vektorbündeln gilt.

Offensichtlich hängt der Index eines ΨDO nur von seinem Hauptsymbol ab.

Satz 7.26. *Sei $\mathcal{A} \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(\mathcal{M})$, und für ein $s_0 \in \mathbb{R}$ sei $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H^{s_0+m}(\mathcal{M}), H^{s_0}(\mathcal{M}))$ fredholm. Dann ist $\mathcal{A}$ elliptisch.*

Beweis. Ohne Beweis. □

Für das folgende Ergebnis siehe auch die Hausaufgabe 1 auf Blatt 12.

Satz 7.27. *Sei $\mathcal{M}$ eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$, einfach zusammenhängend. Sei $\mathcal{A} \in \Psi^m_{\mathrm{cl}}(\mathcal{M})$ elliptisch und skalar. Dann ist* $\operatorname{index} \mathcal{A} = 0$.

Beweis. Siehe [3]. □

Kapitel 8

Operatoren auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

8.1 Operatoren auf Funktionen

Sei $\mathcal{M}$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, d.h. wir haben eine Riemann-Metrik g, also ein 2-Tensorfeld mit $g(X,Y) = g(Y,X)$ und $g(X,X) > 0$, $X \neq 0$, für alle Vektorfelder X, Y. In jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ bekommen wir dann ein Skalarprodukt

$$\langle X,Y\rangle := g(X,Y), \qquad \forall X,Y \in T_p\mathcal{M}.$$

Für Tangentenvektoren können wir dann auch eine Länge definieren als $\|X\| := \sqrt{\langle X,X\rangle}$. In lokalen Koordinaten haben wir dann die Darstellungen

$$\langle U,V\rangle = \sum_{j,k} g_{jk}(x)u^j(x)v^k(x), \qquad U = \sum_j u^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}, \quad V = \sum_j v^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Aus der Symmetriebedingung folgt $g_{jk} = g_{kj}$.

Die Riemann-Metrik erlaubt das Umwandeln von Vektoren $X \in T_p\mathcal{M}$ in Kovektoren $X^\flat \in T_p^*\mathcal{M}$ durch

$$X^\flat(Y) := g(X,Y), \qquad \forall Y \in T_p\mathcal{M}.$$

Wenn $X = \sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, dann ist $X^\flat = \sum_{j,k} g_{jk}X^j\,\mathrm{d}x^x =: \sum_j X_j\,\mathrm{d}x^j$, wobei

$$X_j := \sum_k g_{kj}X^k$$

das *Herunterziehen von Indizes* bezeichnet, deshalb auch $\flat$.

Entsprechend kann man auch Indizes heraufziehen: Seien g^{ij} die Einträge von g^{-1} mit $g = (g_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$, und sei $\omega = \sum_j \omega_j\,\mathrm{d}x^j \in T_p^*\mathcal{M}$ eine 1-Form. Dann definieren wir $\omega^\sharp \in T_p\mathcal{M}$ durch

$$\omega^\sharp := \sum_j \omega^j\frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad \omega^j := \sum_k g^{jk}\omega_k.$$

Damit können wir einen Operator grad definieren: sei $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ skalar-wertig, dann ist wie üblich $\mathrm{d}f = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^j$, und wir definieren

$$\operatorname{grad} f := (\,\mathrm{d}f)^\sharp = \sum_{i,j} g^{ij}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j},$$

so daß folgt

$$\mathrm{d}f(Y) = \langle \operatorname{grad} f, Y\rangle\,, \qquad \forall Y \in T\mathcal{M}.$$

Sei nun $X = \sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in T\mathcal{M}$, dann ist

$$\langle X, \operatorname{grad} f\rangle = \sum_{j,l,k} g_{jl} X^j g^{lk} \frac{\partial f}{\partial x^k} = \sum_{j,k} \delta_{jk} X^j \frac{\partial f}{\partial x^k} = \sum_k X^k \frac{\partial f}{\partial x^k} = Xf.$$

Weiterhin gibt es auf einer orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit $(\mathcal{M}, g)$ der Dimension n genau eine n–Form $\mathrm{d}V$, für die $\mathrm{d}V(E_1, \ldots, E_n) = 1$ ist für jede orientierte Orthonormalbasis $(E_1, \ldots, E_n)$ von $T_p\mathcal{M}$. Wir reden dann vom *Riemannschen Volumenelement.* Sei $(E_1, \ldots, E_n)$ irgendeine orientierte Basis für $T_p\mathcal{M}$ und sei $(\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$ die duale Basis im $T_p^*\mathcal{M}$, dann ist

$$\mathrm{d}V = \sqrt{\det(g_{ij})}\varphi^1 \wedge \ldots \wedge \varphi^n,$$

wobei $g_{ij} := \langle E_i, E_j\rangle$ die Koeffizienten von g sind.

Wir erinnern an die *innere Multiplikation:* Sei ω eine k-Form und $X \in T_p\mathcal{M}$, dann definieren wir die $(k-1)$-Form $i_X\omega$ durch

$$(i_X\omega)(V_1, \ldots, V_{k-1}) := \omega(X, V_1, \ldots, V_{k-1}), \qquad \forall V_1, \ldots, V_{k-1} \in T_p\mathcal{M}.$$

Definition 8.1 (Divergenz eines Vektorfelds). *Sei $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ der Raum der glatten Schnitte durch $T\mathcal{M}$. Dann definieren wir eine lineare Abbildung*

$$\operatorname{div}\colon \mathcal{T}(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$$

durch die Beziehung

$$\mathrm{d}(i_X\,\mathrm{d}V) = (\operatorname{div} X)\,\mathrm{d}V, \qquad \forall X \in \mathcal{T}(\mathcal{M}).$$

In lokalen Koordinaten bedeutet das:

$$\begin{aligned}
&g := \det(g_{ij}), \qquad \mathrm{d}V = \sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n,\\
&X = \sum_j X^j \frac{\partial}{\partial x^j},\\
&i_X\,\mathrm{d}V = \sum_j (-1)^{j-1} X^j \sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j-1} \wedge \mathrm{d}x^{j+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n,\\
&\mathrm{d}(i_X\,\mathrm{d}V) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(X^j\sqrt{g}\right)\,\mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n,
\end{aligned}$$

und somit bekommen wir

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_j \partial_j\left(\sqrt{g}X^j\right).$$

Man rechnet unmittelbar nach, daß $\operatorname{div}(uX) = u \operatorname{div} X + \langle \operatorname{grad} u, X\rangle$ ist, für alle $u \in C^\infty(\mathcal{M})$ und $X \in \mathcal{T}(\mathcal{M})$. Und aus dem Stokes-Satz folgt

$$\int_{\mathcal{M}} \operatorname{div} X\,\mathrm{d}V = \int_{\partial\mathcal{M}} \langle X, N\rangle\,\tilde{\mathrm{d}V}, \qquad \forall X \in \mathcal{T}(M),$$

wobei N das Außeneinheitsnormalenfeld an $\partial\mathcal{M}$ ist, und $\tilde{\mathrm{d}V}$ das Rieman–Volumenelement auf $\partial\mathcal{M}$, induziert von $\mathrm{d}V$. Es folgt dann weiterhin

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \operatorname{grad} u, X\rangle\,\mathrm{d}V = -\int_{\mathcal{M}} u \operatorname{div} X\,\mathrm{d}V + \int_{\partial\mathcal{M}} u\,\langle X, N\rangle\,\tilde{\mathrm{d}V}.$$

Wir definieren nun den Laplace-Operator auf glatten Funktionen:

$$\triangle u := \operatorname{div}\operatorname{grad} u, \qquad u \in C^\infty(\mathcal{M}),$$

und wir stellen fest, daß

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle\,\mathrm{d}V = -\int_{\mathcal{M}} u \triangle v\,\mathrm{d}V + \int_{\partial\mathcal{M}} u(Nv)\,\tilde{\mathrm{d}V}, \qquad u, v \in C^\infty(\mathcal{M}).$$

Wir definieren ein Skalarprodukt auf $\mathcal{T}(\mathcal{M})$:

$$\langle X, Y\rangle_{L^2(\mathcal{M})} := \int_{\mathcal{M}} \langle X, Y\rangle \,\mathrm{d}V, \qquad X, Y \in \mathcal{T}(\mathcal{M}).$$

Wenn wir annehmen, daß $\partial\mathcal{M} = \emptyset$ oder daß u bzw X einen kompakten Träger hat, dann folgt

$$\langle X, \operatorname{grad} u\rangle_{L^2(\mathcal{M})} = -\langle \operatorname{div} X, u\rangle_{L^2(\mathcal{M})}, \qquad \forall u \in C^\infty(\mathcal{M}), \quad X \in \mathcal{T}(\mathcal{M}).$$

Hierbei nehmen wir an, daß X und Y beide reellwertig sind, sodaß wir auf komplexe Konjugationen verzichten können. In diesem Sinne sehen wir $-\operatorname{div}$ als transponierten Operator zu grad.

Wir können auch ein Skalarprodukt auf $C^\infty(\mathcal{M})$ einführen und dies dann mit $\langle u, v\rangle_{L^2(\mathcal{M})}$ bezeichnen, für reellwertige u und v.

Mit entsprechenden Voraussetzungen an $\partial\mathcal{M}$ oder die Träger von u, $v \in C^\infty(\mathcal{M})$ haben wir dann auch

$$\langle \triangle u, v\rangle_{L^2(\mathcal{M})} = \langle u, \triangle v\rangle_{L^2(\mathcal{M})}, \qquad u, v \in C^\infty(\mathcal{M}).$$

Wir sagen dazu auch, daß $\triangle$ symmetrisch im $C^\infty(\mathcal{M})$ ist (die Bezeichnung *selbstadjungiert* wäre hier noch verfrüht, denn dazu gehören auch Aussagen über die Definitionsbereiche $D(\triangle)$ und $D(\triangle^*)$).

Wir bekommen ohne Schwierigkeiten: sei λ ein Eigenwert zu $\triangle$, dann ist entweder $\lambda = 0$ und $u = \text{const.}$, oder $\lambda < 0$.

In lokalen Koordinaten haben wir dann die Darstellung

$$\triangle u = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial u}{\partial x^k}\right).$$

Wenn z.B. $x \in \mathbb{R}^2$ und $x_1 = r\cos\varphi$ und $x_2 = r\cos\varphi$ sowie $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2$ die Riemann-Metrik ist, dann bekommen wir in den neuen Koordinaten (r, φ) die neue Metrik $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\varphi^2$, also

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \qquad g = \det(g_{ij}) = r^2, \qquad \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix},$$

und somit $\triangle u = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r u) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 u$.

Nach diesem Schema kann man auch die Darstellung (5.4) des Laplace-Beltrami-Operators bekommen.

Nun erhalten wir sogar

$$\triangle u = \sum_{j,k} g^{jk} \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k} u + (\text{Terme erster Ordnung auf } u),$$

und die Matrix der g^{jk} ist positiv definit. Dann kann das (negative) reellwertige Hauptsymbol von $\triangle$ in lokalen Koordinaten abgeschätzt werden (nach oben) durch $-\text{const.}\,|\xi|^2$, also ist $\triangle$ ein elliptischer Operator, damit auch fredholm. Schließlich ist mit obigen Stokes-Formeln

$$\langle(-\triangle + 1)u, u\rangle_{L^2(\mathcal{M})} \geq \langle u, u\rangle_{L^2(\mathcal{M})} =: \|u\|^2_{L^2(\mathcal{M})}, \qquad u \in C^\infty(\mathcal{M}),$$

was auf beliebige Funktionen aus dem Sobolevraum $H^2(\mathcal{M})$ mittels Dichteargumenten fortgesetzt werden kann. Daraus folgt die Injektivität von $-\triangle + 1$. Dieser Operator ist ein selbst-adjungierter ΨDO, hat also Index Null, ist also wegen der Injektivität auch surjektiv. Dann können wir uns den inversen Operator $(-\triangle + 1)^{-1}$ anschauen, der von $L^2(\mathcal{M})$ nach $L^2(\mathcal{M})$ kompakt abbildet und symmetrisch ist. Nach unseren früheren Ergebnissen (Satz 7.11) hat dieser inverse Operator also ein reines Punktspektrum, und seine Eigenfunktionen bilden eine Orthonormalbasis des $L^2(\mathcal{M})$. (Diese Argumentation setzt $\partial\mathcal{M} = \emptyset$ voraus.)

Bemerkung 8.2. *Man schaue nochmal auf Satz 5.16 !*

8.2 Operatoren auf Differentialformen

Siehe [17] oder auch [1].

Sei weiterhin $(\mathcal{M}, g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n, und sei

$$\mathrm{d}\colon \Lambda^k\mathcal{M} \to \Lambda^{k+1}\mathcal{M}$$

die äußere Ableitung.

Die Riemannsche Metrik induziert ein Skalarprodukt auf $T_p^*\mathcal{M}$ vermöge

$$\langle \omega, \eta \rangle := \left\langle \omega^\sharp, \eta^\sharp \right\rangle, \qquad \forall \omega, \eta \in T_p^*\mathcal{M}.$$

Die Notation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hat ab jetzt eine Doppelbedeutung (weitere Bedeutungen werden folgen), aber es wird aus dem Kontext hervorgehen, was gemeint ist. In lokalen Koordinaten haben wir dann

$$\langle \omega, \eta \rangle = \sum_{j,k} g^{jk} \omega_j \eta_k, \qquad \omega = \sum_j \omega_j \,\mathrm{d}x^j, \quad \eta = \sum_j \eta_j \,\mathrm{d}x^j.$$

Insbesondere ergibt sich $\langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle = \langle \mathrm{d}u, \mathrm{d}v \rangle$ für alle $u, v \in C^\infty(\mathcal{M})$.

Wir bekommen weiterhin ein Skalarprodukt auf $\Lambda^k T_p^*\mathcal{M}$ via

$$\langle v_1 \wedge \ldots \wedge v_k, w_1 \wedge \ldots \wedge w_k \rangle := \sum_{\pi \in S_k} (\operatorname{sign} \pi) \left\langle v_1, w_{\pi(1)} \right\rangle \cdot \ldots \cdot \left\langle v_k, w_{\pi(k)} \right\rangle$$

für $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$, $w_1 \wedge \ldots \wedge w_k \in \Lambda^k T_p^*(\mathcal{M})$. Integration über $\mathcal{M}$ liefert uns ein weiteres $L^2(\mathcal{M})$–Skalarprodukt:

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\mathcal{M})} := \int_{\mathcal{M}} \langle u, v \rangle \,\mathrm{d}v,$$

wenn u und g glatte Schnitte durch $\Lambda^k\mathcal{M}$ sind.

Mit diesem Skalarprodukt definieren wir einen formal adjungierten Operator δ zu d:

$$\begin{aligned} &\delta\colon \Lambda^{k+1}\mathcal{M} \to \Lambda^k\mathcal{M}, \\ &\langle \mathrm{d}u, v \rangle_{L^2(\mathcal{M})} =: \langle u, \delta v \rangle_{L^2(\mathcal{M})}, \end{aligned}$$

wenn u und v glatte Schnitte durch $\Lambda^k\mathcal{M}$ bzw. $\Lambda^{k+1}\mathcal{M}$ mit kompaktem Träger sind. Auf 0–Formen setzen wir $\delta = 0$.

Wegen $\mathrm{d}^2 = 0$ ist dann auch $\delta^2 = 0$.

Definition 8.3 (Laplace–Operator auf Differentialformen). *Wir definieren einen Operator* $\triangle\colon \Lambda^k\mathcal{M} \to \Lambda^k\mathcal{M}$ *durch*

$$-\triangle := (\mathrm{d} + \delta)^2 = \mathrm{d}\delta + \delta\,\mathrm{d}.$$

Es ergibt sich dann

$$\langle -\triangle\, u, v \rangle_{L^2(\mathcal{M})} = \langle \mathrm{d}u, \mathrm{d}v \rangle_{L^2(\mathcal{M})} + \langle \delta u, \delta v \rangle_{L^2(\mathcal{M})}, \qquad \forall u, v \in C_0^\infty(\mathcal{M}, \Lambda^k\mathcal{M}).$$

Auf $\Lambda^0\mathcal{M}$ ist $-\triangle = \delta\,\mathrm{d}$, und das ist genau unserer früherer Laplace-Operator, denn für Funktionen $u, v \in C_0^\infty(\mathcal{M})$ gilt

$$\langle \delta\,\mathrm{d}u, v \rangle_{L^2(\mathcal{M})} = \langle \mathrm{d}u, \mathrm{d}v \rangle_{L^2(\mathcal{M})} = \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle_{L^2(\mathcal{M})} = -\,\langle \operatorname{div} \operatorname{grad} u, v \rangle_{L^2(\mathcal{M})}.$$

Wir erarbeiten uns nun das pseudodifferentielle Hauptsymbol von $\triangle$. Sei P ein PDO der Ordnung m auf $\mathcal{M}$, der z.B. auf Schnitten durch Vektorbündeln operiert. In lokalen Koordinaten haben wir dann die Darstellung (mit evtl. matrixwertigen Koeffizienten p_α)

$$Pu(x) = \sum_{|\alpha| \le m} p_\alpha(x) D_x^\alpha u(x),$$

wobei $D_x^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot D_n^{\alpha_n}$ und

$$D_j = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Das Hauptsymbol ist das homogene Polynom $p_m(x,\xi) := \sum_{|\alpha|=m} p_\alpha(x)\xi^\alpha$ für $x \in \mathcal{M}$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$. In Erinnerung an Definition 2.40 haben wir

$$p_m(x,\,\mathrm{d}\varphi)u(x) = \lim_{\tau\to\infty} \tau^{-m} e^{-\mathrm{i}\tau\varphi(x)} P\left(e^{\mathrm{i}\tau\varphi(x)}u(x)\right), \qquad \forall \varphi \in C^\infty(\mathcal{M}).$$

Wir haben dann $(x,\,\mathrm{d}\varphi) \in T^*\mathcal{M}$.

Wenn nun P auf Bündeln operiert, also $P\colon C^\infty(\mathcal{M};E_0) \to C^\infty(\mathcal{M};E_1)$, dann ist $p_m(x,\xi)\colon E_{0,x} \to E_{1,x}$ für $(x,\xi) \in T^*\mathcal{M}$ eine Abbildung zwischen Fasern, also ist das Symbol matrixwertig. Wir schreiben auch $\sigma_{p_m}(x,\xi)$ für das Hauptsymbol. Der Komposition von Abbildungen entspricht die Multiplikation der Hauptsymbole. Für den transponierten Operator $P^t\colon C^\infty(\mathcal{M};E_1) \to C^\infty(\mathcal{M};E_0)$, der definiert wird durch $\langle Pu,v\rangle_{L^2(\mathcal{M})} = \langle u,P^tv\rangle_{L^2(\mathcal{M})}$, wenn u und v glatte Schnitte mit kompaktem Träger durch E_0 und E_1 sind, ist dann

$$\sigma_{P^t}(x,\xi) = \left(\sigma_P(x,\xi)\right)^t.$$

Für die äußere Ableitung $\mathrm{d}\colon \Lambda^k\mathcal{M} \to \Lambda^{k+1}\mathcal{M}$ haben wir nun

$$\mathrm{d}\left(e^{\mathrm{i}\tau\varphi(x)}u(x)\right) = \mathrm{i}\tau e^{\mathrm{i}\tau\varphi}(\,\mathrm{d}\varphi) \wedge u + e^{\mathrm{i}\tau\varphi}u, \qquad u \in \Lambda^k M,$$

und somit ist

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\sigma_{\mathrm{d}}(x,\xi)u = \xi \wedge u, \qquad \xi \in T_x^*\mathcal{M},$$

was eine Abbildung ist, die $u(x) \in \Lambda^k T_x^*\mathcal{M}$ auf $\xi \wedge u(x) \in \Lambda^{k+1}T_x^*\mathcal{M}$ abbildet.

Für den zu d transponierten Operator δ haben wir also

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\sigma_\delta(x,\xi)u = -i_X u, \qquad \xi \in T_x^*\mathcal{M}, \qquad u(x) \in \Lambda^{k+1}T_x^*\mathcal{M}$$

wobei $X = \xi^\sharp \in T_x\mathcal{M}$. Insgesamt bekommen wir dann

$$-\sigma_\triangle(x,\xi)u = i_X(\xi \wedge u) + \xi \wedge (i_X u),$$

was nach einiger Rechnung auf $\sigma_\triangle(x,\xi)u = -|\xi|^2 u$ führt, und $|\xi|$ ist hierbei die Länge des Kovektors ξ, ermittelt über die Matrix der g^{jk}.

Als Konsequenz haben wir demnach die Darstellung

$$\triangle u = \sum_{j,l} g^{jl}\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k}u + Y_k u, \qquad u \in C^\infty(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M}),$$

wobei Y_k ein (relativ uninteressanter) Differentialoperator der Ordnung 1 ist. In dieser Darstellung wirken alle Ableitungen nur auf die Koeffizienten der Differentialform u.

Wir können den Laplace-Operator stetig fortsetzen auf Schnitte mit Sobolev-Glattheit, und bekommen dann einen Operator

$$\triangle\colon H^2(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M}) \to L^2(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M}).$$

Bei der Definition von Sobolevräumen $H^s(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M})$ gehen wir in naheliegender Weise vor: an jedem einzelnen Punkt $x \in \mathcal{M}$ haben wir ein Skalarprodukt für $T_x^*\mathcal{M}$, und für skalarwertige Funktionen auf $\mathcal{M}$ haben wir ein Skalarprodukt aus Definition 6.29. Es ergibt sich, daß die Wahl der Karten und Kartenabbildungen einen Einfluß hat auf den Wert der Norm $\|u\|_{H^s(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M})}$, aber sämtliche auf diesem Weg definierbare Normen sind zueinander äquivalent.

Satz 8.4 (Ungleichung von Gårding). *Sei $\mathcal{M}$ eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand, und eine Norm für $H^1(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M})$ sei fixiert. Dann gibt es positive Konstanten C_0, C_1, sodaß*

$$-\langle \triangle u, u\rangle_{L^2(\mathcal{M})} \geq C_0\,\|u\|^2_{H^1(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M})} - C_1\,\|u\|^2_{L^2(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M})}$$

für alle $u \in H^2(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M})$ gilt.

Beweis. Wir vereinbaren, daß Y stets einen Differentialoperator erster Ordnung bezeichnet, der k-Formen auf k-Formen abbildet (und also nur die Koeffizientenfunktionen differenziert). An unterschiedlichen Stellen kann Y jeweils für einen anderen solchen Operator stehen.

Wir verweisen darauf, daß für k-Formen u und v dann gilt:

$$\left|\langle Yu, v\rangle_{L^2(\mathcal{M})}\right| \leq \|Yu\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq C \|u\|_{H^1} \|v\|_{L^2} \leq \varepsilon \|u\|_{H^1}^2 + \frac{\text{const.}}{\varepsilon} \|v\|_{L^2}^2 , \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Für den letzten Schritt erinnern wir an $|ab| \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

Nun überdecken wir $\mathcal{M}$ mit Kartengebieten U_j und wählen reellwertige Funktionen $\varphi_j \in C_0^\infty(U_j)$ mit $\sum_{j=1}^\infty \varphi_j^2(x) \equiv 1$ auf $\mathcal{M}$. Dann haben wir

$$-\langle \triangle u, u\rangle_{L^2(\mathcal{M})} = -\sum_j \left\langle \triangle(\varphi_j^2 u), u\right\rangle_{L^2(\mathcal{M})} = -\sum_j \langle \triangle(\varphi_j u), \varphi_j u\rangle_{L^2(\mathcal{M})} + \langle Yu, u\rangle_{L^2(\mathcal{M})} .$$

Nun kennen wir schon die Darstellung

$$\triangle v = \sum_{k,l} g^{kl} \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^l} v + Yv,$$

also folgt nach partieller Integration (wegen $\partial\mathcal{M} = \emptyset$)

$$-\langle \triangle(\varphi_j u), \varphi_j u\rangle_{L^2(\mathcal{M})} \geq C \|\varphi_j u\|_{H^1}^2 - C' \|\varphi_j u\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 ,$$

mit positiven Konstanten C und C'. Weiterhin ist im Sinne von äquivalenten Normen

$$\|\varphi_j u\|_{H^1}^2 \cong \sum_{k=1}^n \|\partial_k(\varphi_j u)\|_{L^2}^2 + \|\varphi_j u\|_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^n \left\langle \varphi_j^2 \partial_k u, \partial_k u\right\rangle_{L^2(\mathcal{M})} + \langle Yu, u\rangle_{L^2(\mathcal{M})} ,$$

und die Behauptung folgt durch Summation $\sum_j$. $\square$

Für glatte u und v ist

$$-\langle \triangle u, v\rangle_{L^2(\mathcal{M})} = \langle \mathrm{d}u, \mathrm{d}v\rangle_{L^2(\mathcal{M})} + \langle \delta u, \delta v\rangle_{L^2(\mathcal{M})} ,$$

und die rechte Seite stellt eine auf dem $H^1(\mathcal{M}; \Lambda^k\mathcal{M})$ stetige Bilinearform dar. Nun ist $C^\infty(\mathcal{M}; \Lambda^k\mathcal{M})$ dicht im $H^1(\mathcal{M}; \Lambda^k\mathcal{M})$ enthalten, also können wir die rechte Seite als Definition der linken ansehen, wenn u und v aus dem $H^1(\mathcal{M}; \Lambda^k\mathcal{M})$ sein sollten. Auf diesem Wege stellen wir fest, daß die Ungleichung von Gårding auch für $u \in H^1(\mathcal{M}; \Lambda^k\mathcal{M})$ gilt, mit denselben Konstanten C_0 und C_1.

Wir können in jedem der beiden Fälle umsortieren zu

$$\langle(-\triangle + C_1)u, u\rangle_{L^2(\mathcal{M})} \geq C_0 \|u\|_{H^1(\mathcal{M})}^2 .$$

Wenn $u \in H^1(\mathcal{M}; \Lambda^k\mathcal{M})$ ist, dann ist $(-\triangle + C_1)u$ ein Element von $(H^1(\mathcal{M}; \Lambda^k\mathcal{M}))^* = H^{-1}(\mathcal{M}; \Lambda^k\mathcal{M})$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \|(-\triangle + C_1)u\|_{H^{-1}(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M})} &\geq C_0 \|u\|_{H^1(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M})} , &\qquad \forall u \in H^1(\mathcal{M}; \Lambda^k\mathcal{M}), \\ \|(-\triangle + C_1)u\|_{L^2(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M})} &\geq C_0 \|u\|_{H^1(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M})} , &\qquad \forall u \in H^2(\mathcal{M}; \Lambda^k\mathcal{M}), \end{aligned}$$

also ist $-\triangle + C_1$ injektiv als Abbildung (z.B.) von H^2 nach L^2, also $\dim\ker(-\triangle + C_1) = 0$. Weil $-\triangle + C_1$ ein elliptischer PDO auf einer Mannigfaltigkeit ist, ist er fredholm, hat also abgeschlossenes Bild. Nach Konstruktion ist $-\triangle + C_1$ symmetrisch, hat also Index Null, also hat $\mathrm{img}(-\triangle + C_1)$ Kodimension Null, also ist $-\triangle + C_1$ auch surjektiv.

Wir erhalten, daß $-\triangle + C_1$ eine stetige Bijektion von $H^{s+2}(\mathcal{M}; \Lambda^k\mathcal{M})$ auf $H^s(\mathcal{M}; \Lambda^k\mathcal{M})$ ist, für jedes $s \in \mathbb{R}$.

Wir interessieren uns für das Spektrum und die Eigenelemente von $-\triangle$, also betrachten wir den inversen Operator $T := (-\triangle + C_1)^{-1}$, denn dieser hat den Vorteil, kompakt zu sein, wenn man ihn als Operator von $L^2(\mathcal{M}; \Lambda^k\mathcal{M})$ nach $L^2(\mathcal{M}; \Lambda^k\mathcal{M})$ ansieht.

Die Theorie kompakter symmetrischer Operatoren in Hilberträumen liefert, daß T Eigenwerte $\mu_j^{(k)}$ und Eigenelemente $u_j^{(k)}$ besitzt,

$$Tu_j^{(k)} = \mu_j^{(k)} u_j^{(k)},$$

wobei die $\{u_j^{(k)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis des $L^2(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M})$ bilden. Aus der Gårding-Ungleichung bekommt man

$$\langle Tv, v\rangle_{L^2(\mathcal{M})} > 0, \qquad \forall v \in L^2(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M}),$$

also sind alle $\mu_j^{(k)}$ positiv. Weiterhin ist bekannt, daß diese $\mu_j^{(k)}$ sich nur bei Null häufen können, wir dürfen also annehmen, daß sie monoton fallend angeordnet sind (wiederholt entsprechend Vielfachheiten).

Der Operator T bildet von $H^s(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M})$ stetig nach $H^{s+s}(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M})$ ab, woraus mittels Induktion über s folgt, daß die Eigenformen von T glatte Formen sind.

Wenn wir zurück zum $\triangle$ gehen, bekommen wir

$$-\triangle u_j^{(k)} = \lambda_j^{(k)} u_j^{(k)}, \qquad \lambda_j^{(k)} = \frac{1}{\mu_j^{(k)}} - C_1.$$

Die Folge $\{\lambda_j^{(k)}\}_j$ strebt monoton nach $+\infty$. Nun haben wir $-\langle\triangle u, u\rangle_{L^2(\mathcal{M})} = \langle \mathrm{d}u, \mathrm{d}u\rangle_{L^2(\mathcal{M})} + \langle\delta u, \delta u\rangle_{L^2(\mathcal{M})}$, also kann kein $\lambda_j^{(k)}$ negativ sein.

Definition 8.5 (Harmonische Formen). *Die Eigenformen des $\triangle$ zum Eigenwert Null heißen* harmonische Formen. *Der Raum der harmonischen Formen aus dem $L^2(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M})$ wird mit $\mathcal{H}_k$ bezeichnet.*

Der orthogonale (im Sinne des Skalarprodukts des $L^2(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M})$) Projektor auf $\mathcal{H}_k$ sei P_k.

Weil $\triangle$ fredholm ist, haben wir $\dim\mathcal{H}_k < \infty$. Weiterhin haben wir die Äquivalenz

$$u \in \mathcal{H}_k \Longleftrightarrow u \in C^\infty(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M}), \quad \mathrm{d}u = 0, \quad \delta u = 0.$$

Wir definieren nun einen weiteren Operator $G \in \mathcal{L}(L^2(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M}), L^2(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M}))$ über

$$Gu_j^k := \begin{cases} 0 & : \lambda_j^{(k)} = 0, \\ \frac{1}{\lambda_j^{(k)}} u_j^{(k)} & : \lambda_j^{(k)} > 0, \end{cases}$$

und stellen fest, daß $-\triangle Gu_j^{(k)} = (I - P_k)u_j^{(k)}$. Eine entsprechende Identität gilt auch für endliche Linearkombinationen der $u_j^{(k)}$. Wenn u eine solche endliche Linearkombination ist, dann haben wir wegen der Elliptizität von $\triangle$ die Abschätzung

$$\|Gu\|_{H^{s+2}} \le C_{s,t}\left(\|(I-P_k)u\|_{H^s} + \|Gu\|_{H^t}\right), \qquad s,t \in \mathbb{R}.$$

Weil die Menge der endlichen Linearkombinationen von Eigenformen dicht im $H^s(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M})$ liegt, bildet G stetig von $H^s(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M})$ nach $H^{s+s}(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M})$ ab.

Satz 8.6 (HODGE–**Zerlegung**). *Für $u \in H^s(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M})$ mit $s \ge 0$ und obiges G gilt die Zerlegung*

$$u = \delta\,\mathrm{d}Gu + \mathrm{d}\delta Gu + P_k u,$$

und die drei Summanden rechts sind orthogonal im $L^2(\mathcal{M};\Lambda^k\mathcal{M})$.

Beweis. Wir setzen $v := \mathrm{d}Gu \in H^1(\mathcal{M};\Lambda^{k+1}\mathcal{M})$ und $w := \delta Gu \in H^1(\mathcal{M};\Lambda^{k-1}\mathcal{M})$ sowie $z = P_k u$. Dann ist $\langle\delta v, \mathrm{d}w\rangle_{L^2(\mathcal{M})} = \langle v, \mathrm{d}\,\mathrm{d}w\rangle_{L^2(\mathcal{M})} = 0$, und die anderen Beziehungen zeigt man genauso. □

Definition 8.7 (Geschlossene und exakte Formen). *Eine k–Form u heißt* geschlossen, *falls* $\mathrm{d}u = 0$.

Eine k–Form u heißt exakt, *wenn es eine $(k-1)$–Form v gibt mit $u = \mathrm{d}v$.*

Die Vektorräume der geschlossenen bzw. exakten k–Formen werden mit Z^k bzw. B^k bezeichnet.

Definition 8.8 (de Rham–Kohomologie). *Die Räume* $\mathcal{H}^k(\mathcal{M}) := Z^k/B^k$ *heißen* de Rham–Kohomologien.

Satz 8.9. *Sei* $\mathcal{M}$ *eine orientierte geschlossene kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann bestehen die Isomorphien*

$$\mathcal{H}^k(\mathcal{M}) \cong \mathcal{H}_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n = \dim \mathcal{M}.$$

Jede geschlossene Form hat einen harmonischen Repräsentanten.

Beweis. Wenn $u \in \mathcal{H}_k$, dann ist $\mathrm{d}u = \delta u = 0$, also haben wir eine injektive Einbettung

$$j \colon \mathcal{H}_k \hookrightarrow Z^k.$$

Daraus bekommen wir dann eine lineare Abbildung

$$J \colon \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}^k(\mathcal{M}), \qquad u \mapsto [ju].$$

Dies ist der gesuchte Isomorphismus. Denn zunächst ist $\mathcal{H}_k \perp B^k$ im $L^2(\mathcal{M}; \Lambda^k\mathcal{M})$, also haben wir auch $(\operatorname{img} j) \cap B^k = \{0\}$, und deshalb ist J injektiv.

Sei nun $u \in Z^k$, also $\mathrm{d}u = 0$, demnach auch $u \perp \delta\, \mathrm{d}Gu$. Aus der Hodge–Zerlegung bekommen wir dann

$$u = 0 + \mathrm{d}\delta Gu + P_k u,$$

also eine Zerlegung von u in eine exakte und eine harmonische Form. Also ist $u \equiv P_k u \mod B^k$, womit J als surjektiv nachgewiesen ist. □

Weil nun $\dim \mathcal{H}^k(\mathcal{M})$ unabhängig von der gewählten Riemannschen Metrik ist, gilt dies auch für $\dim \mathcal{H}_k$.

Definition 8.10 (Hodge– $*$ –Operator). *Sei* $\mathcal{M}$ *eine kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension* n *mit Volumenform* $\mathrm{d}V$*. Dann wird ein Operator*

$$* \ : C^\infty(\mathcal{M}; \Lambda^k\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M}; \Lambda^{n-k}\mathcal{M})$$

durch die Beziehung

$$u \wedge *v := \langle u, v\rangle \, \mathrm{d}V$$

für k*–Formen* u *und* v *definiert und als* Hodge–$*$–Operator *bezeichnet.*

Aus der Vorlesung zur Globalen Analysis 1 ist bekannt, daß

- $*1 = \mathrm{d}V$,
- $*(e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k}) = (\operatorname{sign}\pi)(e_{l_1} \wedge \ldots \wedge e_{l_{n-k}})$, wenn $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine orientierte Basis von $T_x^*\mathcal{M}$ bilden, und $\{j_1, \ldots, j_k, l_1, \ldots, l_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\}$, und die Permutation π bildet die eine Klammer auf die andere ab,
- $** = (-1)^{k(n-k)}$ auf $C^\infty(\mathcal{M}; \Lambda^k\mathcal{M})$.

Damit kann man zeigen, daß auf $C^\infty(\mathcal{M}; \Lambda^k\mathcal{M})$ gilt:

$$\delta = (-1)^{k(n-k)-n+k-1} * \mathrm{d}*$$

Auf diesem Wege bekommen wir, daß $*$ harmonische Formen auf harmonische Formen abbildet, und wegen $** = \pm 1$ ist diese Abbildung $* \colon \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_{n-k}$ bijektiv.

Folgerung 8.11. *Die Kohomologieklassen* $\mathcal{H}^k(\mathcal{M})$ *und* $\mathcal{H}^{n-k}(\mathcal{M})$ *sind zueinander isomorph.*

Wir schauen uns einige Anwendungen an.

Satz 8.12. *Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m und n. Dann bestehen die Isomorphien von Kohomologieklassen*

$$\mathcal{H}^k(\mathcal{M}\times\mathcal{N}) \cong \bigoplus_{p+q=k} \big(\mathcal{H}^p(\mathcal{M})\otimes\mathcal{H}^q(\mathcal{N})\big), \qquad 0\le k\le m+n.$$

Beweisskizze. Aus den Riemann-Metriken von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ bauen wir eine Riemann-Metrik auf $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$; die dazugehörige Matrix der g_{ij} hat dann Diagonal-Block-Struktur. Es ergibt sich, daß der Laplace-Operator (auf Funktionen) dann die Gestalt

$$\triangle_{\mathcal{M}\times\mathcal{N}} = \triangle_{\mathcal{M}} + \triangle_{\mathcal{N}}$$

hat. Wir haben Orthonormalbasen $\{u_i^{(p)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ und $\{v_j^{(q)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ von $L^2(\mathcal{M};\Lambda^p\mathcal{M})$ und $L^2(\mathcal{N};\Lambda^q\mathcal{N})$, und daraus bekommen wir eine Orthonormalbasis $\{u_i^{(p)}\wedge v_j^{(q)} : p+q=k\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ von $L^2(\mathcal{M}\times\mathcal{N};\Lambda^k(\mathcal{M}\times\mathcal{N}))$. (Man zeigt schnell, daß dies eine orthonormale Familie ist; der schwierige Teil besteht darin zu zeigen, daß diese Familie tatsächlich den gesamten Raum $L^2(\mathcal{M}\times\mathcal{N};\dots)$ aufspannt. Hierbei spielt eine Rolle, daß alle beteiligten Laplace–Operatoren positiv semidefinit sind.)

Damit gilt für die entsprechenden harmonischen Formen die Isomorphie

$$\mathcal{H}_k(\mathcal{M}\times\mathcal{N}) \cong \bigoplus_{p+q=k} \big(\mathcal{H}_p(\mathcal{M})\otimes\mathcal{H}_q(\mathcal{N})\big),$$

woraus die Behauptung folgt. Für die Einzelheiten verweisen wir auf [17, Chapter 5.8]. □

Definition 8.13 (Betti–Zahlen und Euler–Charakteristik). *Für eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ definieren wir die* Betti–Zahlen

$$b_i(\mathcal{M}) := \dim\mathcal{H}^i(\mathcal{M}), \quad i=0,1,\dots,\dim\mathcal{M}$$

und die Euler–Charakteristik

$$\chi(\mathcal{M}) := \sum_{j=0}^{\dim\mathcal{M}} (-1)^j b_j(\mathcal{M}).$$

Dann folgt unmittelbar

$$b_k(\mathcal{M}\times\mathcal{N}) = \sum_{p+q=k} b_p(\mathcal{M})b_q(\mathcal{N}),$$
$$\chi(\mathcal{M}\times\mathcal{N}) = \chi(\mathcal{M})\chi(\mathcal{N}).$$

8.3 Fredholm–Komplexe

Nun seien E_0, E_1, …, E_N Hilberträume, und wir betrachten die Reihung E von Abbildungen

$$0 \xrightarrow{d_{-1}} E_0 \xrightarrow{d_0} E_1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{N-1}} E_N \xrightarrow{d_N} 0. \tag{8.1}$$

Dies soll ein *Komplex* sein, also $d_{j+1}d_j = 0$ für alle $j=0,1,\dots,N-2$.

Wir setzen

$$Z^j := \ker d_j, \qquad B^j := \operatorname{img} d_{j-1}$$

und haben $B^j\subset Z^j$, weil E ein Komplex ist. Der Raum Z^j ist abgeschlossen in E_j, aber B^j ist es nicht unbedingt. Als algebraische Räume definieren wir die *Kohomologieklassen von E*

$$\mathcal{H}^j := Z^j/B^j, \qquad j=0,1,\dots,N.$$

Definition 8.14 (Fredholm–Komplex). *Der Komplex E heißt* fredholm*, wenn* $\dim\mathcal{H}^j<\infty$ *für alle j gilt.*

Lemma 8.15. *Wenn E ein Fredholm–Komplex ist, dann ist B^j ein abgeschlossener Unterraum von Z^j.*

Beweis. Wegen $d_{j+1}d_j = 0$ haben wir $d_{j-1} \in \mathcal{L}(E_{j-1}, Z^j)$. Nun heißt $\dim \mathcal{H}^j < \infty$ aber gerade $\dim \operatorname{coker} d_{j-1} < \infty$, und es verbleibt nur noch, Lemma 7.13 anzuwenden. □

Als Konsequenz haben wir, daß $\mathcal{H}^j$ dann nicht nur ein algebraischer Vektorraum ist, sondern normierbar wird (sogar ein Hilbertraum).

Nun definieren wir

$$\delta_j := d_j^* \in \mathcal{L}(E_{j+1}, E_j), \quad \delta_{-1} = 0,$$
$$\triangle_j := \delta_j d_j + d_{j-1}\delta_{j-1} \in \mathcal{L}(E_j, E_j).$$

Satz 8.16. *Der Komplex E ist fredholm genau dann wenn jeder Operator $\triangle_j$ fredholm ist, als Abbildung von E_j in sich. In diesem Fall ist $\dim \mathcal{H}^j = \dim \ker \triangle_j$, und jedes Element von $\mathcal{H}^j$ hat einen harmonischen Repräsentanten.*

Beweis. Wir tragen einige Ergebnisse zusammen:

- wenn $v_j \in \ker \triangle_j$, dann $0 = \langle v_j, \delta_j d_j v_j\rangle_{E_j} + \langle v_j, d_{j-1}\delta_{j-1} v_j\rangle_{E_j} = \|d_j v_j\|^2_{E_{j+1}} + \|\delta_{j-1} v_j\|^2_{E_{j-1}}$, also $\ker \triangle_j = \ker d_j \cap \ker \delta_{j-1}$.
- Es ist $E_j = \overline{(\operatorname{img} \triangle_j)} \oplus (\ker \triangle_j)$ als orthogonale Zerlegung, denn $\triangle_j \in \mathcal{L}(E_j, E_j)$ und $\triangle_j = \triangle_j^*$.
- Aus $d_{j-1} \in \mathcal{L}(E_{j-1}, Z^j)$ folgt $Z^j = \overline{(\operatorname{img} d_{j-1})} \oplus (\ker(\delta_{j-1|Z^j}))$, woraus sich die orthogonale Zerlegung $Z^j = \overline{B^j} \oplus (\ker \triangle_j)$ ergibt.
- Wegen $d_j d_{j-1} = 0$ ist $\operatorname{img} \delta_j \perp \operatorname{img} d_{j-1}$.
- Daraus folgt $\operatorname{img} \triangle_j \subset (\operatorname{img} \delta_j) \oplus (\operatorname{img} d_{j-1})$ mit orthogonaler Summe rechts.
- Nun ist $E_j = \overline{(\operatorname{img} \triangle_j)} \oplus (\ker \triangle_j) \subset \overline{(\operatorname{img} \delta_j)} \oplus \overline{(\operatorname{img} d_{j-1})} \oplus (\ker \triangle_j) \subset E_j$, und demnach haben wir $\overline{(\operatorname{img} \triangle_j)} = \overline{(\operatorname{img} \delta_j)} \oplus \overline{(\operatorname{img} d_{j-1})}$.
- Es ergibt sich $E_j = \overline{(\operatorname{img} \delta_j)} \oplus \overline{(\operatorname{img} d_{j-1})} \oplus (\ker \triangle_j)$.
- Der Operator $\triangle_j$ ist genau dann fredholm, wenn $\operatorname{img} \triangle_j$ abgeschlossen ist und $\dim \ker \triangle_j < \infty$.

Sei nun $\operatorname{img} \triangle_j$ abgeschlossen sowie $\operatorname{img} \triangle_j \neq (\operatorname{img} \delta_j) \oplus (\operatorname{img} d_{j-1})$. Dann gibt es rechts einen Vektor v_j mehr als links. Diesen Vektor können wir auf den linken Unterraum projizieren (denn dieser ist abgeschlossen), also können wir gleich $0 \neq v_j \perp \operatorname{img} \triangle_j$ annehmen. Wegen der ersten Zerlegung von E_j ist dann $v_j \in \ker \triangle_j$, aber andererseits $v_j \in (\operatorname{img} \delta_j) \oplus (\operatorname{img} d_{j-1})$. Das ist wegen der zweiten Zerlegung von E_j absurd.

Nun können wir argumentieren wie folgt: Seien alle $\triangle_j$ fredholm. Dann sind alle $\operatorname{img} \triangle_j$ abgeschlossen und alle $\ker \triangle_j$ endlichdimensional. Dann ist $\operatorname{img} \triangle_j = (\operatorname{img} \delta_j) \oplus (\operatorname{img} d_{j-1})$, also müssen die beiden rechten Summanden abgeschlossen sein. Also ist $B^j = \overline{B^j}$, und die Zerlegung von Z^j liefert uns $\dim \mathcal{H}^j = \dim(Z^j/B^j) = \dim(Z^j/\overline{B^j}) = \dim \ker \triangle_j$. Also ist der Komplex E fredholm.

Sei nun der Komplex E fredholm. Dann sind alle $B^j = \operatorname{img} d_{j-1}$ abgeschlossene Unterräume von Z^j, also auch von E_j. Wir haben weiterhin $\dim \ker_j = \dim \mathcal{H}^j < \infty$. Zusätzlich sind auch alle $\operatorname{img} \delta_j$ abgeschlossen. Wir haben dann

$$\operatorname{img} \triangle_j \subset (\operatorname{img} \delta_j) \oplus (\operatorname{img} d_{j-1}) = \overline{\operatorname{img} \triangle_j},$$

und es verbleibt dem Leser nur noch zu zeigen, daß $\operatorname{img} \triangle_j$ abgeschlossen ist. □

Wir wollen dies nun anwenden und beginnen mit einer Definition.

Definition 8.17 (EULER–Charakteristik). *Sei E ein Fredholm–Komplex, dann setzen wir*

$$\chi(E) := \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \dim \mathcal{H}^j.$$

Ohne große Schwierigkeiten kann man nun beweisen:

Lemma 8.18. *Sei $N = 1$ und*

$$0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{d_0} E_1 \longrightarrow 0$$

ein Fredholm–Komplex E. Dann ist $\chi(E) = \operatorname{index}(d_0)$.

Lemma 8.19. *Sei E wie in (8.1) ein Fredholm–Komplex mit $\dim E_j < \infty$ für $j = 1, 2, \ldots, N$. Dann ist $\dim E_0 < \infty$ und*

$$\chi(E) = \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \dim E_j.$$

Jetzt sei $\mathcal{M}$ eine glatte orientierte kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Vektorbündeln V_0, V_1, …, V_N, die wir als endlichdimensional voraussetzen. Seien

$$d_j \in \mathcal{L}\left(C^\infty(\mathcal{M}; V_j), C^\infty(\mathcal{M}; V_{j+1})\right), \qquad j = -1, 0, \ldots, N,$$

klassische ΨDO der Ordnung m, die auf Schnitten durch Vektorbündel operieren. Wir setzen voraus, daß

$$0 \xrightarrow{d_{-1}} C^\infty(\mathcal{M}; V_0) \xrightarrow{d_0} C^\infty(\mathcal{M}; V_1) \xrightarrow{d_1} C^\infty(\mathcal{M}; V_2) \ldots \xrightarrow{d_{N-1}} C^\infty(\mathcal{M}; V_N) \xrightarrow{d_N} 0 \tag{8.2}$$

ein Komplex ist, also $d_{j+1} d_j = 0$ für alle j.

Zusätzlich haben wir noch das Kotangentialbündel $T^*\mathcal{M}$ mit Elementen (x, ξ).

Jeder Operator d_j hat ein pseudodifferentielles Hauptsymbol σ_{d_j}, das auf $T^*\mathcal{M}$ lebt, homogen in ξ der Ordnung m ist, und für jedes (x, ξ) als Wert eine Matrix hat, die von der Faser $V_{j,x}$ in die Faser $V_{j+1,x}$ abbildet (entsprechende Trivialisierungen sind noch einzufügen).

Definition 8.20 (Elliptischer Komplex). *Der Komplex (8.2) heißt* elliptisch*, wenn für jedes $(x, \xi) \in T^*\mathcal{M} \setminus 0$ gilt, daß die Sequenz*

$$0 \longrightarrow V_{0,x} \xrightarrow{\sigma_{d_0}(x,\xi)} V_{1,x} \xrightarrow{\sigma_{d_1}(x,\xi)} V_{2,x} \xrightarrow{\sigma_{d_2}(x,\xi)} \ldots \xrightarrow{\sigma_{d_{N-1}}(x,\xi)} V_{N,x} \longrightarrow 0 \tag{8.3}$$

exakt ist als Sequenz von Vektorräumen.

Satz 8.21. *Der Komplex (8.2) ist elliptisch genau dann, wenn alle $\triangle_j := \delta_j d_j + d_{j-1}\delta_{j-1}$ elliptische ΨDO sind, wobei $\delta_j := d_j^*$ der formal adjungierte ΨDO zu d_j ist, definiert anhand des durch die Riemannsche Metrik festgelegten Skalarprodukts auf $\mathcal{M}$.*

Beweis. Wir tragen zusammen:

- Ein klassischer ΨDO, der von einem Bündel U_0 über $\mathcal{M}$ in ein Bündel U_1 über $\mathcal{M}$ abbildet, ist elliptisch genau dann, wenn sein homogenes Hauptsymbol überall auf $T^*\mathcal{M} \setminus 0$ invertierbar ist als Abbildung von U_0–Fasern auf U_1–Fasern.
- Das Hauptsymbol σ_{δ_j} von δ_j ist gleich der hermitesch transponierten Matrix des Hauptsymbols σ_{d_j} von d_j.
- Also hat das Hauptsymbol $\sigma_{\triangle_j}$ von $\triangle_j$ in lokalen Koordinaten die Bauform $B^*B + AA^*$ mit gewissen Matrizen A und B, also ist $\sigma_{\triangle_j}$ eine hermitesche Matrix mit den Abmessungen $(\dim V_{j,x}) \times (\dim V_{j,x})$, die positiv semidefinit ist.

- Elliptizität des Komplexes bedeutet laut Definition $\operatorname{img}(\sigma_{d_j}(x,\xi)) = \ker(\sigma_{d_{j+1}}(x,\xi))$ für alle j und alle $(x,\xi) \in T^*\mathcal{M} \setminus 0$.
- Komposition von Abbildungen entspricht der Multiplikation der Hauptsymbole, also haben wir $\sigma_{d_{j+1}}\sigma_{d_j} \equiv 0$ für alle j und alle (x,ξ), wegen $d_{j+1}d_j = 0$.
- Damit ist (8.3) ein Komplex, in dem alle beteiligten Hilberträume endlichdimensional sind.
- Weil Komplexe mit endlichdimensionalen Hilberträumen immer fredholm sind, haben wir aus Satz 8.16

$$\dim\left(\ker\sigma_{d_j} / \operatorname{img}\sigma_{d_{j-1}}\right) = \dim\ker\left((\sigma_{d_j})^*\sigma_{d_j} + \sigma_{d_{j-1}}(\sigma_{d_{j-1}})^*\right), \qquad \forall (x,\xi) \in T^*\mathcal{M} \setminus 0.$$

- Rechts steht aber gerade $\dim\ker(\sigma_{\triangle_j})$, wobei $\sigma_{\triangle_j}$ das Hauptsymbol von $\triangle_j$ ist.

Damit ergibt sich der Beweis wie folgt: wenn die Sequenz (8.3) exakt ist für alle (x,ξ), dann ist $\ker\sigma_{d_j} / \operatorname{img}\sigma_{d_{j-1}} = 0$, also $\dim\ker\sigma_{\triangle_j} = 0$, also ist das Hauptsymbol von $\triangle_j$ überall invertierbar, also ist $\triangle_j$ ein elliptischer ΨDO.

Und umgekehrt. □

Satz 8.22. *Sei der Komplex (8.2) elliptisch. Dann ist für alle $s \in \mathbb{R}$ der folgende Komplex fredholm:*

$$0 \longrightarrow H^s(\mathcal{M};V_0) \xrightarrow{d_0} H^{s-m}(\mathcal{M};V_1) \xrightarrow{d_1} H^{s-2m}(\mathcal{M};V_2) \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_{N-1}} H^{s-Nm}(\mathcal{M};V_N) \xrightarrow{d_N} 0, \tag{8.4}$$

und die Dimensionen der Kohomologien sind unabhängig von s.

Beweis. Weil der Komplex (8.2) elliptisch ist, sind alle $\triangle_j$ elliptische ΨDO der Ordnung $2m$, die von $H^t(\mathcal{M};V_j)$ nach $H^{t-2m}(\mathcal{M};V_j)$ abbilden. Wegen einer Bündelversion von Theorem 7.25 ist dann auch $\triangle_j \in \mathcal{F}(H^t(\mathcal{M};V_j), H^{t-2m}(\mathcal{M};V_j))$, für jedes $t \in \mathbb{R}$ und jedes j. Nach Satz 8.16 ist dann der Komplex (8.4) fredholm, und wir haben $\dim\mathcal{H}^j = \dim\ker\triangle_j$, was aber unabhängig von s ist, denn $\ker\triangle_j \subset C^\infty(\mathcal{M};V_j)$. □

Satz 8.23. *Der* DERHAM*–Komplex*

$$0 \longrightarrow \Lambda^0\mathcal{M} \xrightarrow{\mathrm{d}} \Lambda^1\mathcal{M} \xrightarrow{\mathrm{d}} \Lambda^2\mathcal{M} \xrightarrow{\mathrm{d}} \dots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Lambda^n\mathcal{M} \longrightarrow 0$$

auf einer reellen glatten riemannschen kompakten orientierten Mannigfaltigkeit der Dimension n ist elliptisch.

Beweis. Gemäß Definition ist die Sequenz der Hauptsymbole auf Exaktheit zu untersuchen.

Sei u eine k–Form und $(x,\xi) \in T^*\mathcal{M} \setminus 0$, dann ist

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\sigma_d(x,\xi)\colon u(x) \mapsto \frac{1}{\mathrm{i}}\sigma_d(x,\xi)u(x) = \xi \wedge u(x)$$

eine Abbildung von $\Lambda^k T_x^*\mathcal{M}$ nach $\Lambda^{k+1}T_x^*\mathcal{M}$. Wir wollen $\operatorname{img}\sigma_{\mathrm{d}_j} = \ker\sigma_{\mathrm{d}_{j+1}}$ zeigen, für alle (x,ξ) und alle j. Dabei können wir $\xi = \mathrm{d}x^1$ annehmen. Nun ist aber $\mathrm{d}_j = \mathrm{d}_{j+1}$ und

$$u \in \ker\sigma_{\mathrm{d}} \iff u = \mathrm{d}x^1 \wedge (\dots) \iff u \in \operatorname{img}\sigma_{\mathrm{d}}.$$

□

Folgerung 8.24. *Die deRham–Kohomologien für eine solche Mannigfaltigkeit sind endlich-dimensional. Wir haben also einen zweiten Beweis für Satz 8.9.*

Wir wollen uns noch den DOLBEAULT–Komplex anschauen. Siehe [17] und [18].

Dazu betrachten wir $\Omega \subset \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ mit Elementen $z = (z_1, \ldots, z_n)$ und

$$z_j = x_j + \mathrm{i} y_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$
$$\mathrm{d}z_j = \mathrm{d}x_j + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y_j, \qquad \mathrm{d}\overline{z}_j = \mathrm{d}x_j - \mathrm{i}\,\mathrm{d}y_j.$$

Dann rechnet man nach, daß

$$\mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}z_k = -\,\mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}z_j, \qquad \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k = -\,\mathrm{d}\overline{z}_k \wedge \mathrm{d}z_j, \qquad \mathrm{d}\overline{z}_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k = -\,\mathrm{d}\overline{z}_k \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j.$$

Eine (p,q)–Form u auf Ω ist ein Schnitt durch das komplexifizierte Bündel $\mathbb{C}\otimes\Lambda^{p+q}T^*\Omega$ der $p+q$–Formen mit der Gestalt

$$u = \sum_{\beta,\gamma} u_{\beta\gamma}(z)\,\mathrm{d}z^\beta \wedge \mathrm{d}\overline{z}^\gamma, \qquad |\beta| = p, \qquad |\gamma| = q.$$

Das Bündel solcher Formen schreiben wir als $\Lambda^{p,q}\Omega$.

Wir setzen $\overline{\partial} \in \mathcal{L}(\Lambda^{p,q}\Omega, \Lambda^{p,q+1}\Omega)$ fest als

$$\overline{\partial}u := \sum_{\beta,\gamma,j} \frac{\partial u_{\beta\gamma}}{\partial \overline{z}_j}\,\mathrm{d}\overline{z}_j \wedge \mathrm{d}z^\beta \wedge \mathrm{d}\overline{z}^\gamma = (-1)^p \sum_{\beta,\gamma,j} \frac{\partial u_{\beta\gamma}}{\partial \overline{z}_j}\,\mathrm{d}z^\beta \wedge \mathrm{d}\overline{z}_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}^\gamma.$$

Dann folgt $\overline{\partial}^2 = 0$, und somit ist

$$\ldots \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{p,q}\Omega \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{p,q+1}\Omega \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{p,q+2}\Omega \xrightarrow{\overline{\partial}} \ldots$$

ein Komplex.

Um einen adjungierten Operator $\overline{\partial}^*$ zu definieren, brauchen wir ein L^2–Skalarprodukt. Beim partiellen Integrieren über Ω entstehen typischerweise Randterme, die einige Schwierigkeiten verursachen. Über elliptische Randwertprobleme zum $\overline{\partial}$–Operator lassen sich ganze Monographien schreiben, wir verweisen hier nur auf [18] und verlangen der Einfachheit halber, daß in einem Produkt zweier Formen mindestens ein Faktor einen kompakten Träger hat.

Wir legen fest, daß $\mathrm{d}z^\beta \wedge \mathrm{d}\overline{z}^\gamma$ senkrecht steht auf $\mathrm{d}z^{\beta'} \wedge \mathrm{d}\overline{z}^{\gamma'}$, wenn $(\beta,\gamma) \neq (\beta',\gamma')$, unter der Normierungsbedingung, daß alle anwesenden Multi-Indizes aufsteigend geordnet sind. Dies führt auf ein Skalarprodukt im Raum der glatten Schnitte durch $\Lambda^{p,q}\Omega$ und somit zum Raum $L^2(\Omega; \Lambda^{p,q}\Omega)$.

Weiterhin sei $\left\| \mathrm{d}z^\beta \wedge \mathrm{d}\overline{z}^\gamma \right\|_{T_z^*} := 2^{p+q}$ für $|\beta| = p$ und $|\gamma| = q$. Damit können wir $\overline{\partial}^* \in \mathcal{L}(\Lambda^{p,q+1}\Omega, \Lambda^{p,q}\Omega)$ definieren, sowie

$$\Box := \overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial} \in \mathcal{L}(\Lambda^{p,q}\Omega, \Lambda^{p,q}\Omega).$$

Nach einiger Rechnung ergibt sich

$$\Box u = -\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma,j}\left(\frac{\partial^2 u_{\beta\gamma}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_{\beta\gamma}}{\partial y_j^2}\right)\mathrm{d}z^\beta \wedge \mathrm{d}\overline{z}^\gamma,$$

also $\Box = -\frac{1}{2}\triangle$.

Sei nun Ω eine kompakte C^∞–Mannigfaltigkeit. Wir sagen, daß J eine *fast-komplexe Struktur* auf $\mathcal{M}$ ist, wenn J ein glatter Schnitt durch das Bündel der Endomorphismen über $T\mathcal{M}$ ist mit $J^2 = -I$. Daraus folgt $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M} \in 2\mathbb{N}_+$. Eine $(0,1)$–Form α auf $\mathcal{M}$ ist ein Schnitt durch das komplexifizierte Kotangentialbündel $\mathbb{C}T^*\mathcal{M}$ der Gestalt

$$\alpha = \beta - \mathrm{i}J^t\beta,$$

wobei β ein Schnitt durch $\mathbb{C}T^*\mathcal{M}$ ist sowie $J^t\colon T_p^*\mathcal{M} \to T_p^*\mathcal{M}$ die transponierte Abbildung zu J. Und für eine $(1,0)$–Form verlangen wir entsprechend die Bauart

$$\alpha = \beta + \mathrm{i}J^t\beta.$$

Damit bekommen wir Vektorbündel $\Lambda^{0,1}\mathcal{M}$ und $\Lambda^{1,0}\mathcal{M}$, und wir haben $\mathbb{C}T^*\mathcal{M} = \Lambda^{0,1}\mathcal{M} \oplus \Lambda^{1,0}\mathcal{M}$.

Durch Übergang zu alternierenden Multilinearformen entsteht dann

$$\mathbb{C}\Lambda^r T^*\mathcal{M} = \bigoplus_{p+q=r} \Lambda^{p,q}\mathcal{M},$$

mit der kanonischen Projektion $\Pi_{p,q}$ von $\mathbb{C}\Lambda^r T^*\mathcal{M}$ auf $\Lambda^{p,q}\mathcal{M}$.

Als Differentialoperatoren wählen wir

$$\begin{aligned} \overline{\partial} &:= \Pi_{p,q+1}\,\mathrm{d} \in \mathcal{L}(\Lambda^{p,q}\mathcal{M}; \Lambda^{p,q+1}\mathcal{M}), \\ \partial &:= \Pi_{p+1,q}\,\mathrm{d} \in \mathcal{L}(\Lambda^{p,q}\mathcal{M}; \Lambda^{p+1,q}\mathcal{M}). \end{aligned}$$

Wenn es einen Atlas gibt mit holomorphen Kartenwechseln, dann gilt

$$\overline{\partial}^2 = 0, \qquad \partial^2 = 0, \qquad \mathrm{d} = \overline{\partial} + \partial.$$

Nun sein angenommen, daß $\mathcal{M}$ eine Riemannsche Metrik hat, für die $J\colon T_p\mathcal{M} \to T_p\mathcal{M}$ eine Isometrie ist, also $\langle X, Y\rangle = \langle JX, JY\rangle$ für alle $X, Y \in T_p\mathcal{M}$. Dann ist J anti-selbstadjungiert. Damit setzen wir

$$(X, Y) := \langle X, Y\rangle + \mathrm{i}\,\langle JX, Y\rangle\,, \qquad X, Y \in T_p\mathcal{M},$$

und es folgt $(X, X) = \langle X, X\rangle \geq 0$, sowie $(JX, Y) = \mathrm{i}(X, Y)$ und $(X, Y) = \overline{(Y, X)}$. In diesem Sinne erzeugt $(\cdot, \cdot)$ eine *hermitesche Metrik*, und $\mathcal{M}$ heißt *hermitesche Mannigfaltigkeit*.

Wir können mittels $\flat$ daraus eine hermitesche Metrik auf dem Kotangentialbündel konstruieren, und anschließend daraus eine hermitesche Metrik auf $\mathbb{C}\Lambda^r T^*\mathcal{M}$. Damit wird es möglich, in jedem Punkt von $\mathcal{M}$ zwei (p, q)–Formen zu multplizieren, und über die Riemannsche Volumenform auf $\mathcal{M}$ bekommen wir dann ein Skalarprodukt $\langle u, v\rangle_{L^2(\mathcal{M})}$ für $u, v \in \Lambda^{p,q}\mathcal{M}$. Dies wiederum ermöglicht uns die Definition von $\overline{\partial}^*$ als adjungierten Operator von $\overline{\partial}$.

Satz 8.25. *Sei zusätzlich zu obigen Voraussetzungen $\partial\mathcal{M} = \emptyset$. Dann ist der* Dolbeault*–Komplex*

$$0 \longrightarrow \Lambda^{p,0}\mathcal{M} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{p,1}\mathcal{M} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{p,2}\mathcal{M} \xrightarrow{\overline{\partial}} \dots \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{p,n}\mathcal{M} \xrightarrow{\overline{\partial}} 0$$

ein elliptischer Komplex, und die Dolbeault–Kohomologien sind endlichdimensional.

Kapitel 9

Ausblicke

9.1 Die Eulercharakteristik

Satz 9.1 (Eulersche **Polyederformel).** *Sei $\mathcal{P}$ ein konvexes Polyeder im $\mathbb{R}^3$ mit E Ecken, K Kanten und F Flächen. Dann ist*

$$E - K + F = 2.$$

Beweis. Interpretiere $\mathcal{P}$ als Graph auf der Sphäre S^2. Ernenne einen Punkt, der weder auf einer Kante noch auf einer Ecke liegt, zum Nordpol, und führe von dort eine stereographische Projektion aus. Es entsteht ein planarer zusammenhängender Graph in der Ebene. Diesen bauen wir schrittweise ab, wobei er immer zuammenhängend bleibt, und $E - K + F$ bleibt invariant.

Wenn $K \geq 1$ ist und $\mathcal{P}$ einen Kreis enthält, dann können wir eine Kante dieses Kreises entfernen, wobei K und F genau um eins sinken.

Wenn $K \geq 1$ ist und $\mathcal{P}$ keinen Kreis enthält, dann ist $\mathcal{P}$ ein Baum und besitzt also einen Endknoten (also eine Ecke, von der genau eine Kante ausgeht). Diese entfernen wir, und K und E sinken genau um eins.

Es entsteht am Ende ein Graph, der genau eine Ecke enthält. Dann ist $E = 1$, $K = 0$ und $F = 1$. □

Offensichtlich haben wir die Konvexität nur dazu benutzt, um zu erzwingen, daß das Geschlecht von $\mathcal{P}$ gleich 0 ist. Hierbei ist das Geschlecht „definiert" als die Anzahl der Henkel, die man an S^2 anhängt, um $\mathcal{P}$ zu erhalten.

Definition 9.2 (Euler**charakteristik).** *Die Eulercharakteristik eines Polyeders $\mathcal{P}$ ist definiert als $\chi(\mathcal{P}) := E - K + F$.*

Man beachte die strukturelle Ähnlichkeit zu $\chi(\mathcal{M}) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \dim \mathcal{H}^j(\mathcal{M})$ für den Fall einer glatten geschlossenen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ der Dimension n.

Satz 9.3. *Für ein Polyeder $\mathcal{P}$ mit Geschlecht g ist $\chi(\mathcal{P}) = 2 - 2g$.*

Damit wollen wir jetzt etwas herumspielen.

Lemma 9.4. *In einem konvexen Polyeder ist $K \leq 3E - 6$ und $K \leq 3F - 6$.*

Beweis. Sei F_n die Anzahl der Flächen, die n–Ecke sind, bzw. die Anzahl der Flächen, die mit genau n Kanten inzidieren.

Dann haben wir $F = \sum_{n=3}^{\infty} F_n$. Durch doppeltes Abzählen erhalten wir $2K = \sum_{n=3}^{\infty} nF_n$. Damit ergibt sich

$$2K = \sum_{n=3}^{\infty} nF_n \geq 3\sum_{n=3}^{\infty} F_n = 3F = 3(2 + K - E),$$

woraus die Behauptung durch Umsortieren folgt.

Sei E_n die Anzahl der Ecken, die mit genau n Kanten inzidieren.

Dann haben wir $E = \sum_{n=3}^{\infty} E_n$. Durch doppeltes Abzählen erhalten wir $2K = \sum_{n=3}^{\infty} nE_n$. Damit ergibt sich

$$2K = \sum_{n=3}^{\infty} nE_n \geq 3 \sum_{n=3}^{\infty} E_n = 3E = 3(2 + K - F),$$

woraus die Behauptung durch Umsortieren folgt. □

Die gezeigten beiden Ungleichungen sind für uns nicht weiter interessant. Viel wichtiger ist die Beobachtung, daß es anscheinend möglich ist, jede Aussage über die Eckenzahl umzuwandeln in eine duale Aussage über die Flächenzahl, und umgekehrt, und die entsprechenden Beweise dualisieren sich (bei geeignetem Zugang) fast von selbst.

In diesem Sinne können wir von einem Polyeder zu einem dualen Polyeder übergehen, indem wir Flächenmittelpunkte zu neuen Ecken machen. Dann sind Oktaeder und Würfel zueinander dual, Ikosaeder und Dodekaeder sind zueinander dual, und das Tetraeder ist zu sich selbst dual.

Mit Phantasie läßt sich diese Dualität als Analogon zur Isomorphie $\mathcal{H}^k(\mathcal{M}) \cong \mathcal{H}^{n-k}(\mathcal{M})$ von Kohomologieklassen interpretieren.

Definition 9.5 (Defektwinkel). *Der* Defektwinkel *einer Ecke ist die Differenz der Summe der Flächeninnnenwinkel mit Scheitelpunkt an dieser Ecke zu* 2π.

Für einen Würfel haben wir an jeder Ecke den Defektwinkel $\pi/2$, und für ein Tetraeder an jeder Ecke den Defektwinkel π.

Satz 9.6 (Descartes). *Bei einem konvexen Polyeder ist die Summe aller Defektwinkel gleich* 4π.

Beweis. Sei F_n die Anzahl der n–Ecke unter den Seitenflächen von $\mathcal{P}$. Dann haben wir die Gesamtflächeninnenwinkelsumme $S = \sum_{n=3}^{\infty}(n-2)\pi F_n$. Die Summe aller Defektwinkel ist dann gleich

$$2\pi E - S = 2\pi E - \pi \sum_{n=3}^{\infty} nF_n + 2\pi \sum_{n=3}^{\infty} F_n,$$

was man zu $2\pi(E - K + F)$ umformt. □

Man vergleiche dieses Ergebnis mit dem Satz von Gauss–Bonnet:

Satz 9.7. *Sei* $\mathcal{M}$ *eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension* 2. *Dann ist*

$$\int_{\mathcal{M}} K \,\mathrm{d}V = 2\pi \cdot \chi(\mathcal{M}),$$

wobei K *die Gauß–Krümmung von* $\mathcal{M}$ *bezeichnet.*

Wenn $\mathcal{M}$ lokal beschrieben wird durch die Gleichung $x_3 = f(x_1, x_2)$ und $p = (x', f(x')) \in \mathcal{M}$ ist, dann kann die Gauß–Krümmung bestimmt werden durch

$$K(p) = \frac{\det\left(\frac{\partial^2 f(x')}{\partial x_j \partial x_k}\right)}{(1 + |\nabla f(x')|^2)^2}$$

Nun seien X und Y kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten ohne Rand, mit der Dimension n, und $F\colon X \to Y$ sei eine glatte Abbildung. Die Mannigfaltigkeit Y sei zusammenhängend. Wir wollen einen Abbildungsgrad definieren (siehe auch [17]), und das machen wir so:

Definition 9.8 (Abbildungsgrad). *Sei* $\omega \in \Lambda^n Y$ *mit* $\int_Y \omega = 1$, *und* $F^*\omega$ *der Pullback von* ω *nach* X. *Dann setzen wir*

$$\deg(F) := \int_X F^*\omega.$$

Satz 9.9. *Der so definierte Abbildungsgrad ist unabhängig von ω.*

Beweis. Sei $\omega_1 \in \Lambda^n Y$ eine weitere Form mit $\int_Y \omega_1 = 1$.

Wir benutzen eine Ergänzung des Poincare–Lemmas: sei $\mathcal{M}$ eine kompakte, zusammenhängende, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n, und sei $\alpha \in \Lambda^n Y$. Dann ist α exakt genau dann wenn $\int_{\mathcal{M}} \alpha = 0$.

Also ist $\omega - \omega_1$ exakt, wir haben also $\omega - \omega_1 = \mathrm{d}\beta$ für ein $\beta \in \Lambda^{n-1} Y$. Dann ist

$$\int_X F^*\omega - \int_X F^*\omega_1 = \int_X F^*(\mathrm{d}\beta) = \int_X \mathrm{d}F^*\alpha = 0,$$

denn $\partial X = \emptyset$. □

Für Anwendungen brauchen wir andere Wege, den Abbildungsgrad zu bestimmen, und dafür benötigen wir einen Begriff:

Definition 9.10 (Regulärer Wert). *Ein Punkt $y_0 \in Y$ heißt* regulärer Wert *von $F \in X \to Y$, wenn $F^{-1}(y_0)$ eine diskrete Menge auf X ist, und wenn zusätzlich gilt: falls $x \in F^{-1}(y_0)$, dann ist die Abbildung $F'(x)\colon T_xX \to T_{y_0}Y$ ein Isomorphismus.*

Nach dem Theorem von Sard sind nicht-reguläre Werte von F eine Lebesgue–Nullmenge auf Y. Im Folgenden wollen wir uns also auf reguläre Werte beschränken.

Die Volumenformen auf X und Y schreiben wir als $\mathrm{d}V_X$ und $\mathrm{d}V_Y$. Falls $F'(x)$ invertierbar ist, setzen wir $JF(x) \in \mathbb{R} \setminus 0$ fest durch

$$F^*(\mathrm{d}V_y) = JF(x) \cdot \mathrm{d}V_x.$$

Das entspricht $\det F'(x)$ falls $X = Y = \mathbb{R}^n$. Nun ist $\operatorname{sign}(JF(x))$ unabhängig von der Wahl der Volumenformen auf X und Y, denn die Orientierungen sind vorgegeben.

Satz 9.11. *Wenn $y_0 \in Y$ ein regulärer Wert von F ist, dann ist*

$$\deg(F) = \sum_{x_j \in F^{-1}(y_0)} \operatorname{sign}(JF(x_j)).$$

Beweis. Wir wählen $\omega \in \Lambda^n Y$ mit $\int_Y \omega = 1$ und Träger in einer Umgebung von y_0. Dann ist

$$\deg(f) = \int_X F^*\omega = \sum_j \int_X \tilde{\omega}_j,$$

wobei $\operatorname{supp}\tilde{\omega_j}$ in einer Umgebung von $x_j \in F^{-1}(y_0)$ enthalten ist. Nun ist $\int_X \tilde{\omega}_j = \pm 1$, je nachdem ob $\operatorname{sign} JF(x_j) = \pm 1$. □

Seien z.B. $X = Y = S^1$, dann entspricht $\deg(F)$ der Umlaufzahl von F.

Satz 9.12. *Sei $\overline{\mathcal{M}}$ eine kompakte orientierte zusammenhängende Riemansche Mannigfaltigkeit mit Rand und $\dim \mathcal{M} = n + 1$. Sei $F\colon \overline{\mathcal{M}} \to Y$ glatt, wobei $\dim Y = n$.*

Sei $f := F_{|\partial\mathcal{M}}\colon \partial\mathcal{M} \to Y$, also eine glatte Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten der Dimension n.

Dann ist $\deg(f) = 0$.

Beweis. Sei $\omega \in \Lambda^n Y$ mit $\int_Y \omega = 1$. Setze $\alpha = F^*\omega$. Nach dem Satz von Stokes ist

$$\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}\alpha = \int_{\partial\mathcal{M}} \alpha,$$

also haben wir

$$\deg(f) = \int_{\partial\mathcal{M}} f^*\omega = \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}(F^*\omega) = \int_{\mathcal{M}} F^*(\mathrm{d}\omega) = 0,$$

denn $\mathrm{d}\omega \in \Lambda^{n+1} Y = 0$. □

Definition 9.13 (Kritische Punkte). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, und V sei ein Vektorfeld auf Ω. Ein Punkt $p \in \Omega$ heißt* kritischer Punkt von V*, wenn $V(p) = 0$.*

Ein kritischer Punkt p von V heißt nichtentartet*, wenn zusätzlich $V'(p)$ eine invertierbare Abbildung ist von $T_p\Omega$ nach $T_0\mathbb{R}^n$.*

Man macht sich schnell klar, daß nichtentartete kritische Punkte isolierte Punkte sind.

Definition 9.14 (Index eines Vektorfeldes). *Sei V ein Vektorfeld auf Ω mit nichtentartetem kritischen Punkt $p \in \Omega$. Für kleine positive ε setzen wir*

$$V_\varepsilon \colon \partial B_\varepsilon(p) \to S^{n-1}, \qquad x \mapsto \frac{V(x)}{|V(x)|},$$

und definieren $\operatorname{ind}_p V := \deg(V_\varepsilon)$*. Wenn V nur endlich viele kritische Punkte hat, setzen wir* $\operatorname{ind}(V) := \sum_j \operatorname{ind}_{p_j}(V)$.

Lemma 9.15. *Es ist $\operatorname{ind}_p(V)$ unabhängig von $0 < \varepsilon \ll 1$, und zwar ist $\operatorname{ind}_p(V) = \operatorname{sign}\det V'(p)$.*

Beweis. Wir setzen $\psi(x) := V'(p) \cdot (x - p)$ und $\psi_\varepsilon(x) := \frac{\psi(x)}{|\psi(x)|}$ für $x \in \partial B_\varepsilon(p)$. Dann sind ψ_ε und V_ε homotop für kleine ε, haben also gleich Abbildungsgrad, und aus Satz 9.11 folgt dann $\deg \psi_\varepsilon = \operatorname{sign}\det \psi_\varepsilon'(x) = \operatorname{sign}\det V'(p)$. □

Nun können wir in einem nächsten Schritt Grad und Index auch global miteinander in Beziehung setzen:

Satz 9.16. *Sei $\overline{\Omega}$ eine beschränkte Menge des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit glattem Rand $\partial\Omega$, sei V ein glattes Vektorfeld auf $\overline{\Omega}$, mit endlich vielen nichtentarteten kritischen Punkten p_j, die alle im Innern Ω liegen. Wir definieren*

$$F \colon \partial\Omega \to S^n, \qquad x \mapsto \frac{V(x)}{|V(x)|}.$$

Dann ist $\operatorname{ind}(V) = \deg(F)$.

Beweis. Wir wählen kleine Kugeln $B_\varepsilon(p_j)$ um die p_j und definieren F auf $\partial B_\varepsilon(p_j)$ sinngemäß wie auf $\partial\Omega$. Setze $\overline{\mathcal{M}} := \overline{\Omega} \setminus \cup_j B_\varepsilon(p_j)$. Wegen Satz 9.12 ist dann $\deg^{(\partial\Omega)}(F) = \sum_j \deg^{(\partial B_\varepsilon(p_j))}(F)$, und dafür setzen wir jetzt die Definition von $\operatorname{ind}_{p_j}(V)$ ein. □

Satz 9.17. *Sei X eine kompakte orientierte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}$ mit $\dim X = n$, sei Ω eine schmale schlauchförmige Umgebung von X in $\mathbb{R}^{n+k}$, und $N \colon \partial\Omega \to S^{n+k-1}$ sei diejenige Abbildung, die an jeden Punkt des Randes die Außeneinheitsnormale anheftet.*

Sei nun W ein beliebiges Vektorfeld auf X mit endlich vielen nichtentarteten kritischen Punkten. Dann ist $\operatorname{ind}(W) = \deg(N)$.

Insbesondere haben also alle solchen Vektorfelder W denselben Index.

Beweisskizze. Sei $\pi \colon \overline{\Omega} \to X$ die Projektion auf den nächsten Punkt. Diese Projektion existiert, wenn der Schlauch schmal ist. Sei $\varphi(z) := (\operatorname{dist}(z, X))^2$ für $z \in \overline{\Omega}$. Dann definieren wir ein Vektorfeld V auf $\overline{\Omega}$ gemäß

$$V(z) = W(\pi(z)) + \nabla\varphi(z),$$

und setzen wie üblich

$$F \colon \partial\Omega \to S^{n+k-1}, \qquad z \mapsto \frac{V(z)}{|V(z)|}.$$

Nun zeigt V immer aus Ω heraus, also sind F und N homotop, haben also gleichen Grad, und es gilt mit unseren bisherigen Erkenntnissen

$$\deg(N) = \deg(F) = \operatorname{ind}(V) = \operatorname{ind}(W),$$

denn jeder kritische Punkt von V ist auch ein kritischer Punkt von W. □

Satz 9.18. *Sei $\mathcal{M}$ eine geschlossene kompakte orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei V ein Vektorfeld auf $\mathcal{M}$. Dann ist* $\operatorname{ind}(V) = \chi(\mathcal{M}) = 2 - 2g$, *wobei $\chi(\mathcal{M})$ die Eulercharakteristik von $\mathcal{M}$ ist und g das Geschlecht.*

Versuch einer Beweisskizze im Spezialfall. Wir schauen uns nur den Fall $\dim \mathcal{M} = 2$ an. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und V ein Vektorfeld auf Ω. Sei $p \in \Omega$ ein nichtentarteter kritischer Punkt von V. Dann ist $V(p) = 0$ und $V'(p)$ regulär. Folgende Fälle sind möglich:

p **ist Quelle:** dann haben die Realteile der Eigenwerte von $V'(p)$ die Vorzeichen $+$, $+$,

p **ist Senke:** dann haben die Realteile der Eigenwerte von $V'(p)$ die Vorzeichen $-$, $-$,

p **ist Sattel:** dann haben die Realteile der Eigenwerte von $V'(p)$ die Vorzeichen $+$, $-$,

p **ist Zentrum:** dann lauten die Eigenwerte von $V'(p)$ gerade $+\mathrm{i}\alpha$ und $-\mathrm{i}\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Die Determinante einer Matrix ist gleich dem Produkt der Eigenwerte.

Also bekommen wir: wenn p ein Sattel von V ist, dann ist $\operatorname{ind}_p(V) = -1$, und in den anderen drei Fällen ist $\operatorname{ind}_p(V) = +1$.

Nun triangulieren wir $\mathcal{M}$ mit Dreiecken. Wir erhalten ein Polyeder $\mathcal{P}$ mit E Ecken, K Kanten, F Flächen und $\chi(\mathcal{P}) = \chi(\mathcal{M})$.

In jedem Dreieck bauen wir ein Vektorfeld wie folgt: ein innerer Punkt wird als Quelle gewählt, jeder der drei Eckpunkte ist eine Senke, und jeder der drei Kantenmittelpunkte ist ein Sattel. Diese lokalen Vektorfelder werden zu einem globalen Vektorfeld auf $\mathcal{P}$ bzw. $\mathcal{M}$ zusammengefügt. Und dieses Vektorfeld hat nun genau F Quellen, E Senken und K Sattelpunkte. □

9.2 Klassen kompakter Operatoren

Lineare Operatoren zwischen Banachräumen sortieren wir „in Reihenfolge aufsteigender Schönheit“.

- unbeschränkte Operatoren: z.B $\triangle\colon D(\triangle) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Definitionsbereich $D(\triangle) = H^2(\mathbb{R}^n)$. Wenn man $D(\triangle)$ mit der $L^2(\mathbb{R}^n)$–Norm ausstattet, ist $\triangle$ unbeschränkt.
- stetige bzw. beschränkte Operatoren
- Fredholm–Operatoren
- kompakte Operatoren
- nukleare Operatoren
- Operatoren mit endlichdimensionalem Bild.

Wir untersuchen jetzt kompakte Operatoren genauer.

Sei X ein Hilbertraum, $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X, X)$. Dann ist $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ kompakt und selbstadjungiert, also hat X eine Orthonormalbasis von Eigenelementen von $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}^*\mathcal{A}u_j = \lambda_j u_j, \qquad j \ge 1,\\
&\lambda_j = \langle \mathcal{A}^*\mathcal{A}u_j, u_j\rangle_X = \|\mathcal{A}u_j\|_X^2 \ge 0,\\
&\mathcal{A}^*\mathcal{A}u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle u, u_j\rangle\, u_j.
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte λ_j können sich nur bei 0 häufen, und 0 kann ein Eigenwert unendlicher Vielfachheit sein, das stört im Folgenden aber überhaupt nicht. Seien jetzt $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ die positiven Eigenwerte, nach Vielfachheiten wiederholt.

Definition 9.19. *Die Zahlen $\mu_j := \sqrt{\lambda_j} > 0$ heißen die* Singulärwerte *von $\mathcal{A}$.*

Nach Konstruktion sind die Singulärwerte eines kompakten Operators eindeutig bestimmt.

Satz 9.20. *Seien X und $\mathcal{A}$ wie oben gegeben. Dann existieren zwei Orthonormalbasen $(v_1, v_2, \dots)$ und $(w_1, w_2, \dots)$ mit*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}v_j &= \mu_j w_j,\\
\mathcal{A}^* w_j &= \mu_j v_j,\\
\mathcal{A}u &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \langle u, v_j \rangle w_j.
\end{aligned}$$

Beweis. Man definiere v_j als Eigenvektor von $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ zum Eigenwert μ_j^2, setze $w_j = \frac{1}{\mu_j}\mathcal{A}v_j$ und rechne. □

Definition 9.21. *Wir setzen $\mathcal{K}_\infty(X) := \mathcal{K}(X, X)$ als die Klasse der kompakten Operatoren von X nach X, $\mathcal{K}_0(X)$ als die Klasse der Operatoren aus $\mathcal{L}(X, X)$ mit endlich dimensionalem Bild, und für $0 < p < \infty$ setzen wir*

$$\|\mathcal{A}\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^p\right)^{1/p}$$

sowie

$$\mathcal{K}_p(X) := \left\{\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X, X) \colon \|\mathcal{A}\|_p < \infty\right\}.$$

Dann haben wir die Teilmengenbeziehungen $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_p \subset \mathcal{K}_q \subset \mathcal{K}_\infty$ für $0 < p < q < \infty$.

Von besonderer Bedeutung sind

$\mathcal{K}_2$: Hilbert–Schmidt–Operatoren,

$\mathcal{K}_1$: Spurklasseoperatoren oder auch nukleare Operatoren,

deren Eigenschaften wir jetzt zusammentragen:

Für Hilbert–Schmidt–Operatoren gilt:

- wenn für eine Orthonormalbasis $(u_1, u_2, \dots)$ von X die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \|\mathcal{A}u_j\|_X^2$ einen endlichen Wert hat, dann auch für jede andere Orthonormalbasis, und der Wert ist jedesmal derselbe, nämlich $\|\mathcal{A}\|_{HS}^2 := \sum_{j=1}^{\infty} \|\mathcal{A}u_j\|_X^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2$, wobei die μ_j die singulären Werte von $\mathcal{A}$ sind.
- es ist $\|\mathcal{A}^*\|_{HS} = \|\mathcal{A}\|_{HS}$,
- wir haben $\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(X,X)} \le \|\mathcal{A}\|_{HS}$,
- wenn $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ mit Eigenwerten $\alpha_j \in \mathbb{R}$, dann ist $\|\mathcal{A}\|_{HS}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2$.
- Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B} \in \mathcal{K}_2(X)$, dann haben wir ein Skalarprodukt auf $\mathcal{K}_2(X)$ gemäß

  $$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle_{HS} := \sum_{j=1}^{\infty} \langle \mathcal{A}u_j, \mathcal{B}u_j \rangle_X ,$$

  und der Wert dieser Reihe ist unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis $(u_1, u_2, \dots)$.
- Sei $\mathcal{A} \in \mathcal{K}_2(X)$ sowie $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(X, X)$, dann sind $\mathcal{AB}$ und $\mathcal{BA}$ Elemente von $\mathcal{K}_2(X)$ — somit ist $\mathcal{K}_2(X)$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{L}(X, X)$ — und wir haben die Abschätzungen

  $$\max\left(\|\mathcal{AB}\|_{HS}, \|\mathcal{BA}\|_{HS}\right) \le \|\mathcal{A}\|_{HS} \cdot \|\mathcal{B}\|_{\mathcal{L}(X,X)}.$$

Von besonderer Bedeutung ist folgendes Ergebnis:

Satz 9.22. *Sei $X = L^2(\Omega, \mathrm{d}\mu)$. Dann ist $\mathcal{A} \in \mathcal{K}_2(X)$ genau dann, wenn der Schwartz–Kern A von $\mathcal{A}$ zum $L^2(\Omega \times \Omega, \mathrm{d}\mu \otimes \mathrm{d}\mu)$ gehört, und wir haben*

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}u)(x) &= \int_\Omega A(x, y) u(y) \,\mathrm{d}\mu(y),\\
\|\mathcal{A}\|_{HS}^2 &= \iint_{\Omega\times\Omega} |A(x, y)|^2 \,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y).
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir Spurklasseoperatoren:

Definition 9.23. *Die Klasse $\mathcal{TR}(X)$ besteht aus allen kompakten Operatoren C auf X, für die endlich viele Operatoren $\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j \in \mathcal{K}_2(X)$ existieren mit $C = \sum_j \mathcal{A}_j \mathcal{B}_j$.*

Dann haben wir:

- $\mathcal{TR}(X)$ ist ein linearer Raum, und zwar gleich $\mathcal{K}_1(X)$,
- wenn $\mathcal{A} \in \mathcal{TR}(X)$, dann ist $\sum_{j=1}^\infty |\langle \mathcal{A}u_j, u_j\rangle_X| < \infty$ für jede Orthonormalbasis $(u_1, u_2, \dots)$ von X, und der Wert des Ausdrucks
$$\operatorname{tr}(\mathcal{A}) := \sum_j \langle \mathcal{A}u_j, u_j\rangle_X$$
ist unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis,
- Für $\dim X < \infty$ ist $\operatorname{tr}(\mathcal{A})$ gleich der Spur der die Abbildung $\mathcal{A}$ erzeugenden Matrix A,
- Wenn $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ kompakt ist mit Eigenwerten $\alpha_j \in \mathbb{R}$, dann ist $\mathcal{A} \in \mathcal{TR}(X)$ genau dann wenn $\sum_{j=1}^\infty |\alpha_j| < \infty$, und es ist dann $\operatorname{tr}(\mathcal{A}) = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j$,
- wir haben $\operatorname{tr}(\mathcal{A}^*) = \overline{\operatorname{tr}(\mathcal{A})}$,
- wenn $\mathcal{A} \in \mathcal{TR}(X)$ und $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(X,X)$, dann sind $\mathcal{AB}$ und $\mathcal{BA}$ Spurklasseoperatoren, und es ist $\operatorname{tr}(\mathcal{AB}) = \operatorname{tr}(\mathcal{BA})$.

Und wieder schauen wir uns den Fall eine Funktionenraumes X besonders an:

Satz 9.24. *Sei $X = L^2(\Omega, \mathrm{d}\mu)$. Sei $\mathcal{A} \in \mathcal{TR}(X)$ mit stetigem Schwartz–Kern A, also*
$$(\mathcal{A}u)(x) = \int_\Omega A(x,y)u(y)\,\mathrm{d}\mu(y).$$
Dann ist
$$\operatorname{tr}(A) = \int_\Omega A(x,x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Die Behauptung gilt mit Modifikationen auch dann, wenn der Schwartz–Kern lediglich eine L^2–Funktion auf $\Omega \times \Omega$ ist. Für den Beweis ist dann zu beachten, daß $\operatorname{diag}(\Omega \times \Omega)$ eine Nullmenge in $\Omega \times \Omega$ ist.

Als Anwendung sei nun $\mathcal{M}$ eine geschlossene kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit, und L sei ein elliptischer PDO auf $\mathcal{M}$ der Ordnung 2, dessen Hauptsymbol positiv auf $T^*\mathcal{M}$ ist. Dieses Hauptsymbol soll skalar sein, die Terme niederer Ordnung dürfen matrixwertige Symbole haben.

Wir wollen das Problem
$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = -Lu(t,x), & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathcal{M}, \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathcal{M} \end{cases}$$
wenigstens approximativ lösen. Wir gehen davon aus, daß Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung schon anderweitig bewiesen worden, und wir schreiben dafür
$$u(t,x) = \left(e^{-tL}f\right)(x).$$

Weiterhin setzen wir voraus, daß $\exp(-tL)$ für positive t ein glättender Operator ist. Dann haben wir auf jeden Fall eine Schwartz–Kern–Darstellung
$$u(t,x) = \int_\mathcal{M} H(t,x,y)f(y)\,\mathrm{d}V_y,$$
und der Kern H — man redet auch vom *heat kernel* — ist stetig, also ist $\exp(-tL)$ ein Spurklasseoperator.

Um jetzt H besser kennenzulernen, machen wir in lokalen Koordinaten den Ansatz

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}x\xi} a(t,x,\xi) \hat{f}(\xi) \, đ\xi$$

mit $a(t,x,\xi) \sim \sum_{j=0}^\infty a_j(t,x,\xi)$ modulo einer noch zu bestimmenden Restklasse. Wir bestimmen die a_j rekursiv, zum Beispiel haben wir $a_0(t,x,\xi) = \exp(-tL_2(x,\xi))$. Wir beschreiben die Symbolklassen für die a_j detailliert, definieren dann einen Wert für die asymptotische Summation $\sum_j \ldots$, und erhalten dann eine Funktion u, für die gilt:

$$\begin{cases} (\partial_t + L)u(t,x) = r(t,x), \\ \qquad\quad u(0,x) = f(x), \end{cases}$$

und r ist eine glatte Funktion, die für $t \to +0$ schnell fällt. Also haben wir den Schwartz–Kern H bestimmt bis auf einen glatten Rest, der bei $t = 0$ schnell abfällt. Wir bekommen dann Darstellungen

$$\operatorname{tr}\left(e^{-tL}\right) \sim t^{-n/2}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots), \qquad t \to +0.$$

Als Anwendung davon betrachten wir $L = -\triangle$. Dann ist $a_0 = (4\pi)^{-n/2} \operatorname{vol} \mathcal{M}$, und wir haben

$$\operatorname{tr}\left(e^{t\triangle}\right) = \sum_{j=0}^\infty e^{-t\lambda_j} \sim t^{-n/2}(a_0 + a_1 + \ldots),$$

wobei $0 = \lambda_0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ die Eigenwerte von $-\triangle$ sind. Wenn nun $N(\lambda)$ die Anzahl der Eigenwerte von $-\triangle$ zählt, die kleiner sind als λ, dann bekommt man die Eigenwertasymptotik

$$N(\lambda) \sim \frac{\operatorname{vol}\mathcal{M}}{\Gamma(n/2+1)(4\pi)^{n/2}} \lambda^{n/2}, \qquad \lambda \to +\infty,$$

und daraus eine Asymptotik für λ_j, wenn $j \to \infty$.

Definition 9.25 (Dirac–Operatoren). *Sei $\mathcal{M}$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Vektorbündeln E_0 und E_1. Ein Differentialoperator*

$$D \colon C^\infty(\mathcal{M}; E_0) \to C^\infty(\mathcal{M}; E_1)$$

heißt Dirac–Operator*, wenn D ein elliptischer Operator erster Ordnung ist, für den D^*D ein skalares Hauptsymbol hat, das von der Faser $E_{0,x}$ in die Faser $E_{0,x}$ abbildet.*

Ein Beispiel dafür ist $D = \mathrm{d} + \delta \colon \Lambda^*\mathcal{M} \to \Lambda^*\mathcal{M}$, wobei $\mathrm{d} \colon \Lambda^k\mathcal{M} \to \Lambda^{k+1}\mathcal{M}$ die äußere Ableitung ist und $\delta = \mathrm{d}^*$. Dann ist $-D^*D = \triangle$ gleich dem Hodge–Laplace.

Mit einigen Hilfsmitteln läßt sich dann die Indexformel

$$\operatorname{index}(D) = \operatorname{tr}\left(e^{-tD^*D}\right) - \operatorname{tr}\left(e^{-tDD^*}\right)$$

zeigen. Für weitere Betrachtungen in dieser Richtung verweisen wir auf [18], insbesondere Kapitel 7.13, 8.3 und 10, sowie [8, Kapitel 19]. Eine umfassende Darstellung findet sich weiterhin in [5], von wo wir auch die beiden abschließenden Resultate entnehmen:

Satz 9.26. *Sei $\mathcal{A}$ ein Fredholm–Operator, und $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ sowie $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ sollen reines Punktspektrum haben. Seien weiterhin $\exp(-t\mathcal{A}\mathcal{A}^*)$ und $\exp(-t\mathcal{A}^*\mathcal{A})$ Spurklasse–Operatoren für jedes $t > 0$. Dann ist $\operatorname{index}(\mathcal{A}) = \operatorname{tr}(\exp(-t\mathcal{A}^*\mathcal{A})) - \operatorname{tr}(\exp(-t\mathcal{A}\mathcal{A}^*))$.*

Satz 9.27. *Sei $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$ ein abgeschlossener, dicht definierter Operator. Dann ist $\mathcal{A}$ genau dann ein Fredholm–Operator, wenn es einen Operator $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(Y,X)$ gibt, sodaß $1 - \mathcal{B}\mathcal{A}$ und $1 - \mathcal{A}\mathcal{B}$ Spurklasse–Operatoren sind. In diesem Fall ist*

$$\operatorname{index}(\mathcal{A}) = \operatorname{tr}(1 - \mathcal{B}\mathcal{A}) - \operatorname{tr}(1 - \mathcal{A}\mathcal{B}).$$

Kapitel 10

Übungsaufgaben

Übungen zur Globalen Analysis II — Blatt 1

1. Man zeige, daß man durch

$$T(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right), \qquad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$$

ein lineares Funktional auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ definieren kann. Ist T eine Distribution ?

2. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ und $\varphi_j(x) = \frac{1}{j}\varphi(\frac{x}{j})$ für $x \in \mathbb{R}^n$ und $j \in \mathbb{N}$. Wir können diese Funktionen glatt auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortsetzen durch die Konvention $\varphi_j(0) := 0$. Man untersuche, ob die Folge $(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ konvergent ist.

3. Man zeige, daß es keine Metrik d auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ geben kann, so daß für alle Folgen $(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$ von Funktionen aus $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Aussagen

   (a) $\varphi_j \to 0$ für $j \to \infty$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

   (b) $d(\varphi_j, 0) \to 0$ für $j \to \infty$

   äquivalent sind.

4. Man finde eine Funktion $E\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sodaß

$$(-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} E(x) \partial_{x_1} \dots \partial_{x_n} \varphi(x)\, dx = \varphi(0)$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Übungen zur Globalen Analysis II — Blatt 2

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ ein offenes Intervall, und sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ eine Distribution mit $\partial_x u = 0$. Zeige, daß u eine reguläre Distribution ist, die von einer konstanten Funktion erzeugt wird.

   Sei $a \in C^\infty(\Omega)$. Zeige, daß jede Distributionenlösung von $u'(x) + a(x)u(x) = 0$ (wobei $x \in \Omega$) eine klassische Lösung ist.

2. Zu den temperierten Distributionen aus $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ mit den darstellenden Funktionen $x \mapsto 1$ und $x \mapsto x$ bestimme man die Fouriertransformierten.

3. Sei $0 < p < 1$ und sei ℓ^p die Menge aller komplexen Zahlenfolgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} |z_n|^p < \infty$. Man beweise:

   (a) ℓ^p wird mit den üblichen Operationen „Addition zweier Folgen“ und „Multiplikation einer Zahl mit einer Folge“ zu einem $\mathbb{C}$–Vektorraum.

   (b) Durch $d(x, y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|^p$ kann man eine Metrik auf ℓ^p definieren, durch die ℓ^p zu einem topologischen Vektorraum wird.

4. Man beweise, daß der in der vorigen Aufgabe angegebene topologische Vektorraum (ℓ^p, d) nicht lokalkonvex ist.

5. Sei $f_n(x) = \sin(nx)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Die dazugehörigen regulären Distributionen bezeichnen wir mit T_n, also $T_n(\varphi) = \int_{x\in\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$. Man untersuche, ob

   (a) für die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise Konvergenz fast überall vorliegt,

   (b) für die Distributionenfolge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Konvergenz in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vorliegt.

   Gegebenenfalls gebe man den Grenzwert an.

Übungen zur Globalen Analysis II — Blatt 3

1. Für meßbare Funktionen u, $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definieren wir die Faltung $u * v$ als

$$(u * v)(x) := \int_{\mathbb{R}^n_y} u(y)v(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Man gebe (möglichst sinnvolle) Abschätzungen an für $\|u * v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ und $\|u * v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$.

Man beweise, daß diese Operation bilinear, kommutativ, assoziativ ist als Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, und in jedem Faktor stetig.

2. Man beweise die Stetigkeit der Einbettung $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Man beweise: die Fouriertransformation bildet von $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ nach $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ab, gemäß der Formel

$$(\mathcal{F}u)(\xi) := \langle u, \exp(-\mathrm{i}x \cdot \xi)\rangle_{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_x)\times\mathcal{E}(\mathbb{R}^n_x)}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_x).$$

Weiterhin zeige man, daß $\mathcal{F}u$ langsam wächst:

$$|\mathcal{F}u(\xi)| \leq C_u(1 + |\xi|)^{N_u}, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Hinweis: Definition 2.4 im Skript.

3. Mit den beiden vorigen Aufgaben zeige man, daß die Faltung (in jedem Faktor stetig) fortgesetzt werden kann zu einer Abbildung

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \tag{10.1}$$
$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{10.2}$$

sodaß jedesmal die Identität $\mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}(u)\mathcal{F}(v)$ gilt.

4. Sei $P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D_x^\alpha$ ein PDO mit konstanten Koeffizienten. Man beweise, daß in den beiden Fällen (10.1) und (10.2) gilt: $P(u * v) = (Pu) * v = u * (Pv)$.

Sei $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ eine Fundamentallösung zu P, also $PE = \delta$ als Gleichung zwischen Distributionen.

Man zeige: wenn $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ und $u := E * f$, dann löst u die Differentialgleichung $Pu = f$ als Gleichung zwischen Distributionen.

Übungen zur Globalen Analysis II — Blatt 4

1. Zeigen Sie: wenn $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ eine Distributionenlösung zu $\triangle u = 0$ ist, dann ist u ein Polynom.

   Hinweis: Fouriertransformation.

   Gibt es Distributionenlösungen zu $\triangle u = 0$, die keine Polynome sind ?

2. Zeigen Sie:

   - der Sobolevraum $H^s(\mathbb{R}^n)$ mit $s > n/2$, $s \in \mathbb{R}$, ist eine Algebra. Das heißt: wenn $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$, dann auch $u \cdot v \in H^s(\mathbb{R}^n)$.
   - jede Funktion $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ mit $s > n/2$, $s \in \mathbb{R}$, hat einen stetigen Repräsentanten.

3. Sei $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Zeige, daß es dann ein $k \in \mathbb{N}_+$ und ein $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gibt mit $u = (1 - \triangle)^k f$ (als Identität zwischen Distributionen).

4. Sei $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, und es sei $\langle u, f \rangle_{\mathcal{E}' \times \mathcal{E}} = 0$ für jedes Polynom $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Zeige, daß dann $u \equiv 0$ sein muß.

5. Sei $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_n > 0\}$ ein Halbraum des $\mathbb{R}^n$. Wir betrachten den Spuroperator γ_0 auf $\partial\Omega$:

   $$\gamma_0 \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}),$$
   $$\gamma_0 \colon u = u(x_1, \ldots, x_0) \mapsto \gamma_0 u = (\gamma_0 u)(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

   wobei $(\gamma_0 u)(x_1, \ldots, x_{n-1}) := u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$.

   Man beweise

   $$\|\gamma_0 u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C_0 \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

   und konstruiere damit einen Spuroperator $\gamma_0 \colon H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$.

Übungen zur Globalen Analysis II — Blatt 5

Zu einem pseudodifferentiellen Symbol $p = p(x,\xi) \in S^m$ definieren wir einen Operator $P(x, D_x)$ durch $(P(x,D_x)u)(x) := \int_{\mathbb{R}^n_\xi} e^{\mathrm{i}x\xi} p(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,đ\xi$. Wenn nichts anderes gesagt ist, dann gilt die Vereinbarung $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

1. Zeigen Sie, daß der Durchschnitt $\bigcap_{m\in\mathbb{R}} S^m_{\varrho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ tatsächlich nicht von $\varrho, \delta \in [0,1]$ abhängt.

   Man zeige weiterhin, daß $S^m_{\varrho,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ ein Frechet–Raum ist.

   Man finde ein pseudodifferentielles Symbol $p \in \bigcap_{0<\varepsilon<1/3} S^0_{1-\varepsilon,\varepsilon}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, für das aber $p \notin S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

2. Sei $a = a(x,\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ und sei A der dazugehörige Operator. Man zeige, daß

   $$(A(x,D_x)u)(x) = \int_{\mathbb{R}^{2n}_{p,q}} \hat{a}(q,p) e^{\mathrm{i}q\cdot X} e^{\mathrm{i}p\cdot D} u(x)\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}p \qquad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

   ist, wobei die Operatoren $e^{\mathrm{i}q\cdot X}$ („Phasenfaktor“) und $e^{\mathrm{i}p\cdot D}$ („Taylorentwicklung“) definiert werden durch

   $$(e^{\mathrm{i}q\cdot X}u)(x) := e^{\mathrm{i}q\cdot x}u(x), \qquad (e^{\mathrm{i}p\cdot D}u)(x) := u(x+p).$$

3. Seien $a, b \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ und A, B die dazugehörigen Operatoren. Man zeige: dann ist $C := A \circ B$ ein Pseudodifferentialoperator. Für dessen Symbol $c = c(x.\xi)$ gebe man eine Darstellung als (oszillierendes) Integral an.

   Hinweis: vorige Aufgabe

4. Sei $\chi = \chi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Abschneidefunktion, also z.B. $\chi(\xi) = 1$ für $|\xi| < 1$ und $\chi(\xi) = 0$ für $|\xi| > 2$. Für ein pseudodifferentielles Symbol $p = p(x,\xi) \in S^m_{\varrho,\delta}$ und $\varepsilon > 0$ setzen wir $p_\varepsilon(x,\xi) = p(x,\xi)\chi(\varepsilon\xi)$, und der dazugehörige Operator sei $P_\varepsilon(x, D_x)$.

   Man beweise: wenn $\varrho, \delta \in [0,1]$ und $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann ist $\lim_{\varepsilon\to+0} P_\varepsilon u = Pu$, mit Konvergenz in der Topologie von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

   Man beweise: wenn $\varrho, \delta \in [0,1]$, wobei $\delta < 1$, und wenn $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, dann ist $\lim_{\varepsilon\to+0} P_\varepsilon u = Pu$, mit Konvergenz in der schwach-$*$-Topologie von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Übungen zur Globalen Analysis II — Blatt 6

1. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{\varphi}(\xi) \geq 0$ für alle ξ und $\hat{\varphi}(0) = 1$. Sei weiterhin $\eta \neq 0$ und

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \varphi(kx) \exp(\mathrm{i}k^2 x \cdot \eta).$$

Bestimmen Sie den singulären Träger von u und $\Gamma(u)$.

2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in C_0^\infty(U)$ mit $|\partial_x^\alpha a(x)| \leq C_\alpha (1+|x|)^{-n-1}$ für alle α. Sei weiterhin φ reellwertig und glatt mit $|\nabla\varphi(x)| \geq \varepsilon > 0$ für ein ε und alle x. Zeigen Sie, daß dann

$$I(\lambda) := \int_{x \in U} e^{\mathrm{i}\lambda\varphi(x)} a(x)\, \mathrm{d}x$$

eine schnell fallende Funktion von $\lambda \in \mathbb{R}$ ist.

3. Eine Distribution $T = (x + \mathrm{i}0)^{-1}$ definieren wir auf dem Raum $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ wie folgt:

$$T(\varphi) := \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\mathbb{R}^1_x} (x + \mathrm{i}\varepsilon)^{-1} \varphi(x)\, \mathrm{d}x, \qquad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1).$$

Geben Sie der Gleichung $T = P.V.\frac{1}{x} - \pi \mathrm{i}\delta(x)$ einen Sinn und einen Beweis, bestimmen Sie die Fouriertransformation von T und die Wellenfrontmenge.

4. Zeigen Sie die Formel $WF(\kappa^* u) = \kappa^* WF(u)$ für lineare Transformationen κ und reguläre Distributionen u auf $\mathbb{R}^n$.

Übungen zur Globalen Analysis II — Blatt 7

1. Sei $a(x,\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x,\xi)$ eine asymptotisch konvergente Reihe mit $a \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$ und $a_k \in S^{m-k}_{1,0}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$. Geben Sie der Aussage „asymptotisch konvergente Reihen darf man termweise differenzieren“ eine Bedeutung und einen Beweis.

2. Sei $a \in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$ mit globalen Symbolabschätzungen (was heißt das ?), und sei $\mathcal{A}$ der dazugehörige ΨDO. Zeigen Sie, daß $\mathcal{A}$ den Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig in sich abbildet, und daß $\mathcal{A}$ auch den Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ stetig in sich abbildet.

3. Seien $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}^n$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Man beweise, daß

$$(z_1 + \cdots + z_k)^\alpha = \sum_{\alpha^{(1)}+\cdots+\alpha^{(k)}=\alpha} \frac{\alpha!}{\alpha^{(1)}! \cdot \ldots \cdot \alpha^{(k)}!} z_1^{\alpha^{(1)}} \cdot \ldots \cdot z_k^{\alpha^{(k)}}.$$

   Zeige damit, daß

$$\partial_x^\alpha \left(f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_k(x)\right) = \sum_{\alpha^{(1)}+\cdots+\alpha^{(k)}=\alpha} \frac{\alpha!}{\alpha^{(1)}! \cdot \ldots \cdot \alpha^{(k)}!} \left(\partial_x^{\alpha^{(1)}} f_1\right)(x) \cdot \ldots \cdot \left(\partial_x^{\alpha^{(k)}} f_k\right)(x)$$

   für Funktionen $f_j \in C^\infty(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gilt.

4. Man gebe eine Formel für $\partial_x^\alpha f(g(x))$ an. Hierbei sei g skalarwertig und $x \in \mathbb{R}^n$.

Die letzten beiden Aufgaben sehen nicht nach globaler Analysis aus, sind aber für diverse Rechnereien mit pseudodifferentiellen Symbolen nötig.

Übungen zur Globalen Analysis II — Blatt 8

Zu nuklearen (lokalkonvexen) Räumen kann man z.B. [12] oder [9] konsultieren.

Seien F und G Banachräume, und sei F' der Dualraum zu F, ausgestattet mit der üblichen Norm. Ein linearer stetiger Operator L von F nach G heißt *nuklear*, wenn es Folgen $(g_1, g_2, \dots) \subset G$ und $(f_1', f_2', \dots) \subset F'$ und $(c_1, c_2, \dots) \subset \mathbb{C}$ gibt mit $\|g_j\|_G \leq 1$ und $\left\|f_j'\right\|_{F'} \leq 1$ für alle j sowie $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j| < \infty$, sodaß gilt:

$$Lf = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \left\langle f_j', f \right\rangle_{F' \times F} g_j$$

für alle $f \in F$, mit Konvergenz auf der rechten Seite in der Operator-Norm.

Sei V ein Frechet-Raum mit Halbnormen $(p_1, p_2, \dots)$, die die Topologie von V erzeugen. Wir können oBdA annehmen, daß jede Halbnorm alle ihre Vorgänger umfaßt, also die obige Halbnormenfolge ersetzen durch $(p_1, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3, \dots)$. Die Vervollständigung von V unter der Halbnorm p_k sei mit V_k bezeichnet.

Der Raum V heißt *nuklear*, wenn es zu jedem k ein $l > k$ gibt, sodaß die natürliche Abbildung von V_l nach V_k nuklear ist.

1. Zeigen Sie, daß nukleare Operatoren kompakte Operatoren sind (also solche Operatoren, die beschränkte Mengen auf Mengen abbilden, deren Abschluß kompakt ist).
2. Zeigen Sie: in einem nuklearen Frechet-Raum ist eine Teilmenge genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

   Nukleare Frechet-Räume haben noch einige andere schöne Eigenschaften.
3. Zeigen Sie:
   - Der Raum $C^\infty(M)$ ist nuklear, wobei M eine kompakte Mannigfaltigkeit sei.
   - Der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist nuklear.
   - Der Raum der ganzen holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ ist auch nuklear (sinnvolle Topologie bitte selber finden).
4. Zeigen Sie, daß jedes Symbol aus $S^m_{cl}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ ein eindeutig bestimmtes Hauptsymbol hat.

Übungen zur Globalen Analysis II — Blatt 9

1. Sei $p \sim p_m + p_{m-1} + \dots$ ein klassisches Symbol aus dem $S^m_{\mathrm{cl}}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Man zeige, daß das sogenannte *subprincipal symbol*

$$p_{sub}(x,\xi) = p_{m-1}(x,\xi) - \frac{1}{2\mathrm{i}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 p_m}{\partial x_j \partial \xi_j}(x,\xi)$$

invariant definiert werden kann (dort wo $p_m(x,\xi) = 0$ und $\operatorname{grad}_\xi p_m(x,\xi) = 0$), im Gegensatz zum Symbol p_{m-1}.

2. Sei $A = A(x,\xi)$ ein matrixwertiges Symbol, mit Werten im $\mathbb{C}^{2\times 2}$. Die Matrix-Einträge $a_{jk} = a_{jk}(x,\xi)$ sollen zur Symbolklasse $S^{m_{jk}}_{\mathrm{cl}}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$ gehören, wobei $m_{jk} \in \mathbb{Z}$ irgendwelche Ordnungen sein sollen.

   Man denke sich einen sinnvollen Elliptizitätsbegriff aus.

   Für die entsprechenden elliptischen Matrix-Symbole konstruiere man Parametrizes.

Übungen zur Globalen Analysis II — Blatt 10

1. Sei $\mathcal{M}$ eine glatte Mannigfaltigkeit, $\Lambda^k\mathcal{M}$ der Raum der glatten k–Formen auf $\mathcal{M}$, und sei d der deRham–Operator $\mathrm{d}\colon \Lambda^k\mathcal{M} \to \Lambda^{k+1}\mathcal{M}$. Man bestimme das Hauptsymbol von d.

2. Sei $\mathcal{M}$ eine kompakte Mannigfaltigkeit und $P \in \Psi^0_{\varrho,\delta}(\mathcal{M})$ mit $0 \leq \delta < \varrho \leq 1$ und $1 - \varrho \leq \delta$.

   (a) Sei p_0 das Hauptsymbol (in lokalen Koordinaten) von P. Man zeige, daß der Ausdruck

   $$\sup_{x\in\mathcal{M}} \limsup_{|\xi|\to\infty} |p_0(x,\xi)| =: N(P)$$

   wohl-definiert ist.

   (b) Sei $\|A\|_{L^2(\mathcal{M})\to L^2(\mathcal{M})}$ die gewöhnliche Operatornorm. Man beweise

   $$\inf\Big\{\|P+K\|_{L^2(\mathcal{M})\to L^2(\mathcal{M})} : K \text{ kompakt auf } L^2(\mathcal{M})\Big\} \leq N(P).$$

Übungen zur Globalen Analysis II — Blatt 11

1. Auf dem Torus $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ zerlegen wir Funktionen f als $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k \exp(\mathrm{i}kx)$ und führen den Sobolevraum $H^s(\mathbb{R}^n)$ ein als Vervollständigung von $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ unter der Norm

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{T}^n)} := \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{2s} |f_k|^2}.$$

   Man zeige, daß diese Definition äquivalent zur Definition aus der Vorlesung ist.

2. Wir sagen, eine Funkion f wäre analytisch auf $\mathbb{T}^n$, wenn ein $\alpha > 0$ existiert mit

$$\|f\|_{\mathcal{A},\alpha} := \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \exp(2\alpha \langle k\rangle)|f_k|^2} < \infty.$$

   Man zeige, daß dieser Begriff der Analytizität mit dem herkömmlichen übereinstimmt.

3. Sei X ein Funktionenraum, (hier sind nur $X = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ oder der Raum der analytischen Funktionen relevant).

   Wir sagen (im Unterschied zur Vorlesung), ein PDO P wäre X–hypoelliptisch, wenn gilt:

   Falls $u \in D'$, $f \in X$ und $Pu = f$, dann auch $u \in X$.

   Man zeige, daß der Wärmeleitungsoperator lokal im $\mathbb{R}^{1+n}$ C^∞–hypoelliptisch ist, aber nicht lokal analytisch–hypoelliptisch.

   Evtl. Gelfand-Shilov I-V, oder man schaue die Fundamentallösung genau an.

   Man suche Operatoren, die auf dem Torus global hypoelliptisch sind, aber nicht lokal hypoelliptisch.

4. Ein PDO P heißt *lokal lösbar* in einem Punkt $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, wenn es eine Umgebung U in Ω von x_0 gibt, sodaß gilt: für jedes $f \in C_0^\infty(U)$ hat die Gleichung $Pu = f$ eine Lösung $u \in \mathcal{D}'(U)$.

   Lewy hat ein berühmtes Beispiel eines Operators erster Ordnung angegeben, der nicht lokal lösbar ist, nämlich $P = \partial_x - \frac{y}{2}\partial_t - \mathrm{i}\partial_y - \mathrm{i}\frac{x}{2}\partial_t$ auf dem $\mathbb{R}^3$

   Man zeige: wenn P^t C^∞–hypoelliptisch ist, dann ist P lokal lösbar.

   Satz vom abgeschlossenen Graphen.

Übungen zur Globalen Analysis II — Blatt 12

1. Zu jedem $k \in \mathbb{Z}$ konstruiere man auf dem Einheitskreis S^1 einen elliptischen Pseudodifferentialoperator mit Ordnung 0 und Index k.

2. Sei $\mathcal{M}$ eine kompakte Mannigfaltigkeit und $m \in \mathbb{R}$. Man konstruiere einen elliptischen ΨDO auf $\mathcal{M}$ der Ordnung m mit Index 0.

3. Sei P ein elliptischer ΨDO auf einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ der Ordnung m mit Index 0. Man zeige, daß es einen Operator T mit endlich-dimensionalem Bild und Schwartz–Kern aus $C^\infty(\mathcal{M} \times \mathcal{M})$ gibt, sodaß $P + T\colon H^{s+m}(\mathcal{M}) \to H^s(\mathcal{M})$ ein Isomorphismus ist für jedes $s \in \mathbb{R}$.

Übungen zur Globalen Analysis II — Sommerblatt

1. Seien $\alpha_{1,j} \in \Lambda^{l_1}\mathcal{M}$ und $\alpha_{2,j} \in \Lambda^{l_2}\mathcal{M}$ Folgen von Differentialformen mit

   $$\alpha_{1,j} \to \alpha_1, \qquad \alpha_{2,j} \to \alpha_2, \qquad \text{in } H^1(\mathcal{M}).$$

   Man zeige, daß dann $\mathrm{d}\alpha_{1,j} \wedge \mathrm{d}\alpha_{2,j} \to \mathrm{d}\alpha_1 \wedge \mathrm{d}\alpha_2$ in $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$.

   Hinweis: $\mathrm{d}\alpha_{1,j} \wedge \mathrm{d}\alpha_{2,j} = \mathrm{d}(\dots)$.

2. Seien $\sigma_{1,j} \in \Lambda^{l_1}\mathcal{M}$ und $\sigma_{2,j} \in \Lambda^{l_2}\mathcal{M}$ Folgen von Differentialformen mit schwachen Konvergenzen $\sigma_{1,j} \to \sigma_1$ und $\sigma_{2,j} \to \sigma_2$ im L^2. Weiterhin seien die Folgen der $\mathrm{d}\sigma_{1,j}$, $\mathrm{d}\sigma_{2,j}$ kompakt im H^{-1}.

   Man zeige, daß man $\sigma_{1,j} = \mathrm{d}\alpha_{1,j} + \beta_{1,j}$ (und analog für $\sigma_{2,j}$) schreiben kann, wobei die $\alpha_{1,j}$ die Voraussetzungen aus Aufgabe 1 erfüllen, und die Folge der $\beta_{1,j}$ ist kompakt im L^2.

   Hinweis: Hodge-Zerlegung für σ.

3. Zeige, daß unter den obigen Voraussetzungen die schwache Konvergenz $\sigma_{1,j} \wedge \sigma_{2,j} \to \sigma_1 \wedge \sigma_2$ im $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$ vorliegt.

4. Sei $\dim \mathcal{M} = 3$, und seien X_j, Y_j Folgen von Vektorfeldern auf $\mathcal{M}$ mit Konvergenzen $X_j \to X$ und $Y_j \to Y$ (schwach im $L^2(\mathcal{M})$), wobei die Folgen der $\operatorname{div} X_j$ und $\operatorname{rot} Y_j$ kompakt im $H^{-1}(\mathcal{M})$ seien.

   Zeige, daß dann schwache Konvergenz $X_j \cdot Y_j \to X \cdot Y$ im $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$ vorliegt.

   Hinweis: Man baue äquivalente 1–Formen und benutze den $*$ von Hodge.

Dieses Ergebnis ist bekannt als *div-curl-lemma* von Murat und Tartar.

Anhang A

Fakten aus Topologie und Funktionalanalysis

In diesem Abschnitt tragen wir einige Fakten zusammen, ohne Beweise. Es geht hierbei eher um das Zusammenfassen von Dingen, die wir als bekannt voraussetzen wollen, weshalb dieser Abschnitt auch bei weitem kein Lehrbuchkapitel sein will.

Es sei X eine beliebige Menge; wir könnten uns darunter zum Beispiel eine Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$ oder einen Funktionenraum vorstellen. Um Sinnlosigkeiten zu vermeiden, sei $X \neq \emptyset$.

Definition A.1 (Topologie). *Eine* Topologie *ist eine Menge τ von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:*

- $\emptyset \in \tau$,
- $X \in \tau$,
- *der Durchschnitt endlich vieler Elemente von τ ist in τ,*
- *die Vereinigung beliebig vieler (überabzählbar viele sind erlaubt !) Elemente von τ ist auch in τ.*

Das Paar (X, τ) heißt topologischer Raum. *Wenn $A \in \tau$ ist, dann heißt A eine* offene Menge, *und das Komplement $X \setminus A$ heißt* abgeschlossene Menge.

Definition A.2 (Hausdorffraum). *Ein topologischer Raum (X, τ) ist ein* Hausdorffraum, *wenn es zu zwei verschiedenen Elementen $x_1, x_2 \in X$ stets offene Mengen $A_1, A_2 \in \tau$ gibt mit $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$ und $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.*

Topologische Räume, die keine Hausdorffräume sind, haben sich als unbeliebt erwiesen und werden deshalb hier nicht weiter betrachtet.

Definition A.3 (Stetige Abbildung). *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen (X, τ) und (Y, σ) heißt* stetig, *wenn das Urbild jeder in Y offenen Menge eine in X offene Menge ist.*

Wenn man nun im konkreten Fall ermitteln will, ob eine Abbildung stetig ist, hat man einiges zu tun: nämlich für jede denkbare offene Menge B in Y das Urbild $f^{-1}(B)$ zu untersuchen. Offene Mengen in Y können recht unübersichtlich sein: wenn z.B. $Y = \mathbb{R}^1$, dann sind die offenen Mengen (also diejenigen, die man typischerweise als offen bezeichnet) gerade diejenigen, die man als beliebige (ggf. überabzählbare) Vereinigung von offenen Intervallen bekommt.

Die ganze Sache wird etwas einfacher, wenn man zu Umgebungen und Umgebungsbasen übergeht.

Definition A.4. *Eine Menge $N \subset X$ ist* Umgebung eines Punktes $x_0 \in X$, *wenn es eine offene Menge U gibt mit $x_0 \in U \subset N$.*

Man beachte, daß eine Umgebung nicht offen sein muß. Eine Umgebung kann auch ziemlich „groß“ sein: X ist eine Umgebung von x_0.

Definition A.5. *Sei $x_0 \in X$. Eine Familie $\mathcal{U}(x_0)$ von Teilmengen von X heißt* Umgebungsbasis *von x_0, wenn folgendes gilt:*

- *jedes Element von $\mathcal{U}(x_0)$ ist eine Umgebung von x_0,*
- *zu jeder Umgebung U von x_0 gibt es ein Element $\tilde{U} \in \mathcal{U}(x_0)$ mit $\tilde{U} \subset U$.*

Wir sagen auch, daß U von $\tilde{U}$ unterboten *wird.*

Für den Fall von $X = \mathbb{R}^n$, ausgestattet mit der üblichen pythagoräischen Metrik, sind typische Umgebungsbasen gerade zusammengesetzt aus den offenen ε–Umgebungen des jeweiligen Punktes. Es reicht auch, nur solche ε–Umgebungen zu nehmen, für die $\varepsilon = 1/j$ für ein $j \in \mathbb{N}_+$. Man spricht dann von einer abzählbaren Umgebungsbasis.

Definition A.6 (Stetigkeit in einem Punkt). *Eine Abbildung $f \colon X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen (X, τ) und (Y, σ) heißt* stetig in einem Punkt *$x_0 \in X$, wenn zu jeder Umgebung V von $f(x_0)$ eine Umgebung U von x_0 gehört, sodaß $f(U) \subset V$.*

Es reicht aus, für U und V jeweils Elemente von Umgebungsbasen der Punkte x_0 und $f(x_0)$ zuzulassen.

Satz A.7. *Eine Abbildung $f \colon X \to Y$ ist stetig genau dann, wenn sie stetig in jedem Punkt von X ist.*

Definition A.8 (Basis einer Topologie). *Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Familie σ von Teilmengen von X heißt* Basis der Topologie*, wenn jedes Element von σ eine offene Menge ist, und wenn jede offene Menge von X geschrieben werden kann als (ggf. überabzählbare) Vereinigung von Elementen aus σ.*

Ein typisches Beispiel für den Fall $X = \mathbb{R}^n$ ist die Menge aller offenen ε–Umgebungen in X. Man überlegt sich leicht, daß es in diesem Fall möglich ist, eine abzählbare Basis der Topologie zu finden.

Definition A.9 (Unterbasis einer Topologie). *Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Familie σ von Teilmengen von X heißt* Unterbasis der Topologie *τ, wenn die Menge der endlichen Durchschnitte von Elementen aus σ eine Basis der Topologie τ ist.*

Satz A.10 (Inneres einer Menge). *Sei (X, τ) ein topologischer Raum, und sei A eine Teilmenge von X. Dann gibt es genau eine größte offene Menge $U \in \tau$ mit $U \subset A$. Diese Menge U heißt* Inneres von *A.*

Zum Beweis nehme man einfach alle in A enthaltenen offenen Mengen, und dann deren Vereinigung.

Satz A.11 (Abschluß einer Menge). *Sei (X, τ) ein topologischer Raum, und sei A eine Teilmenge von X. Dann gibt es genau eine kleinste abgeschlossene Menge U mit $A \subset U$. Diese Menge U heißt* Abschluß von *A.*

Zum Beweis nehme man einfach alle A enthaltenden abgeschlossenen Mengen, und dann deren Durchschnitt.

Definition A.12 (Induzierte Topologie). *Sei (X, τ) ein topologischer Raum, und sei $\emptyset \neq A \subset X$. Die von X auf A* induzierte Topologie *besteht dann aus allen Mengen der Gestalt $A \cap U$, wobei $U \in \tau$.*

Aufpassen: Sei z.B. $X = \mathbb{R}^1$ mit der üblichen Topologie, die von der Standard–Metrik erzeugt wird, und sei $A = [-1, 1]$. Dann ist z.B. $(0.5, 1]$ eine offene Menge in der auf A induzierten Topologie, aber keine offene Menge in X.

Die Folgenkonvergenz definiert man auf naheliegende Weise wie folgt:

Definition A.13 (Konvergenz von Folgen). *Wir sagen, daß eine Folge $(x_1, x_2, \dots) \subset X$ gegen ein Element $x^* \in X$* konvergiert*, wenn zu jeder Umgebung U von x^* ein $N_0 = N_0(U)$ existiert, sodaß $x_n \in U$ für jedes $n \geq N_0$ gilt.*

Warnung A.14. *Für vollständige metrische Räume X, Y ist die Stetigkeit einer Abbildung $f \colon X \to Y$ gleichbedeutend mit der sogenannten* Folgenstetigkeit*, die definiert werden kann als $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$, für jede konvergente Folge $(x_1, x_2, \dots) \subset X$. Diese Äquivalenz gilt in allgemeinen topologischen Räumen nicht mehr: aus der Folgenstetigkeit folgt nicht unbedingt die Stetigkeit.*

Warnung A.15. *In allgemeinen topologischen Räumen fallen auch die Begriffe* dicht *und* folgen-dicht *auseinander. Hierbei heißt eine Menge A* **dicht** *in einem topologischen Raum, wenn der Abschluß von A gleich X ist. Und A heißt* **folgen-dicht** *in X, wenn jedes Element von X Grenzwert einer geeigneten Folge aus A ist.*

Definition A.16 (Kompaktheit). *Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt* kompakt*, wenn Überdeckung von A durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung enthält.*

Warnung A.17. *In vollständigen metrischen Räumen gilt: eine Menge A ist genau dann kompakt, wenn in ihr jede Folge eine in A konvergente Teilfolge enthält. Diese Äquivalenz gilt in allgemeinen topologischen Räumen normalerweise* **nicht***. Diese Äquivalenz kann man wiederherstellen, wenn man die Begriffe „Folge" und „Teilfolge" ersetzt durch „Netz" und „Teilnetz".*

Satz A.18. *Wenn X ein Hausdorffraum ist, dann ist jede kompakte Menge abgeschlossen.*

Definition A.19 (Produkttopologie). *Seien (X, τ) und (Y, σ) topologische Räume. Die* Produkttopologie *auf $X \times Y$ ist diejenige Topologie, die alle Mengen $U \times V$ als Unterbasis hat, wobei U alle offenen Mengen in X durchläuft, und V alle offenen Mengen in Y durchläuft.*

Definition A.20 (Topologischer Vektorraum). *Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Die Standardnorm macht $\mathbb{K}$ zu einem topologischen Raum. Sei X ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Wir sagen, daß X ein* topologischer Vektorraum (TVR) *ist, wenn (X, τ) ein topologischer Hausdorffraum ist, wobei die Topologie τ so beschaffen ist, daß die Vektoraddition und die Multiplikation mit Skalaren stetige Abbildungen von $X \times X$ nach X bzw. $\mathbb{K} \times X$ nach X sind. Hierbei sind $X \times X$ und $\mathbb{K} \times X$ mit den Produkttopologien ausgestattet.*

Sei $A \subset X$ eine Teilmenge eines TVR X, $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x_0 \in X$. Dann definieren wir $x_0 + A$ und λA als Verschiebung der Menge A um den Vektor x_0 bzw. als zentrische Stauchung/Streckung der Menge A mit dem Faktor λ.

Um eine Topologie auf X zu beschreiben, reicht es dann aus, für den Nullpunkt eine Umgebungsbasis anzugeben:

Satz A.21. *Sei $\mathcal{U}(0)$ eine Umgebungsbasis von $0 \in X$ (eine sogenannte Nullumgebungsbasis). Dann ist, für jedes $x_0 \in X$, die Menge $x_0 + \mathcal{U}(0)$ eine Umgebungsbasis des Punktes x_0.*

Daraus bekommt man dann schnell:

Satz A.22. *Eine lineare Abbildung $f \colon X \to Y$ zwischen zwei TVR ist genau dann stetig, wenn sie im Nullpunkt stetig ist.*

Definition A.23 (Beschränktheit). *Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt* beschränkt*, wenn es zu jedem $U \in \mathcal{U}(0)$ ein $\lambda_0 = \lambda_0(U) \in \mathbb{R}$ gibt mit $A \subset \lambda U$ für jedes $\lambda \geq \lambda_0$.*

Das bedeutet anschaulich: die Menge A wird von jeder Umgebung des Ursprungs geschluckt, wenn man diese nur groß genug aufbläst.

Satz A.24. *Kompakte Mengen in TVRen sind beschränkt.*

Definition A.25 (Konvex). *Eine Menge $A \subset X$ eines $\mathbb{K}$–Vektorraumes X heißt* konvex*, wenn gilt: falls $x_1, x_2 \in A$, dann ist auch $tx_1 + (1-t)x_2 \in A$, für jedes reelle $t \in [0, 1]$.*

Definition A.26 (Lokalkonvexer TVR). *Ein TVR heißt* lokalkonvex*, wenn er eine Nullumgebungsbasis besitzt, von der jedes Element eine konvexe Menge ist.*

Wir können diese konvexen Nullumgebungen U als *kreisförmig* annehmen: das heißt $\lambda U \subset U$ für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \leq 1$.

Zu jedem Element U einer Nullumgebungsbasis eines TVR können wir eine Halbnorm definieren:

Satz A.27 (Minkowski-Funktional). *Sei U eine konvexe kreisförmige Nullumgebung. Dann erfüllt das Minkowski-Funktional*

$$p_U(x) := \inf\{\lambda > 0 \colon x \in \lambda U\}$$

folgende Eigenschaften:

- *für jedes* $x \in X$ *ist* $p_U(x)$ *endlich,*
- $p_U(x) \geq 0$ *für jedes* $x \in X$,
- $p_U(\alpha x) = |\alpha| p_U(x)$ *für alle* $x \in X$ *und* $\alpha \in \mathbb{K}$,
- $p_U(x_1 + x_2) \leq p_U(x_1) + p_U(x_2)$ *für alle* $x_1, x_2 \in X$.

Man sagt auch, daß p_U eine Halbnorm auf X ist.

Für den Beweis des ersten Punktes benutze man, daß eine einpunktige Menge kompakt ist, also beschränkt.

Satz A.28. *Sei* $\mathcal{U}(0)$ *ein System konvexer kreisförmiger Nullumgebungen, und sei* $p_U(x_0) = 0$ *für jedes* $U \in \mathcal{U}(0)$. *Dann ist* $x_0 = 0$.

Man sagt auch, daß die Familie aller Halbnormen *Punkte trennt*. Für den Beweis wird entscheidend benutzt, daß der Raum X als hausdorffsch vorausgesetzt wurde.

Wir haben also aus einem System konvexer kreisförmiger Nullumgebungen eines TVR eine Familie von Halbnormen gebaut. Man kann auch andersherum vorgehen:

Satz A.29. *Sei* X *ein Vektorraum über dem Körper* $\mathbb{K}$, *und sei* $\{p_i : i \in I\}$ *eine Familie von Halbnormen (wobei die Indexmenge* I *überabzählbar sein darf). Wir setzen voraus, daß diese Familie* trennend *ist: wenn* $p_i(x_0) = 0$ *für jedes* $i \in I$, *dann muß* $x_0 = 0$ *sein. Zu jeder Halbnorm* p_i *und jedem* $\varepsilon > 0$ *betrachten wir Mengen*

$$U_{i,\varepsilon} = \{x \in X : p_i(x) < \varepsilon\}.$$

Dann ist die Familie

$$\{U_{i,\varepsilon} : i \in I,\ \varepsilon > 0\}$$

eine Unterbasis einer Topologie τ *auf* X.

Bemerkenswert ist es jetzt, daß Minkowski-Funktionale und konvexe Nullumgebungsbasen äquivalente Beschreibungen derselben Topologie sind:

Satz A.30. *Sei* (X, τ) *ein lokalkonvexer Raum mit einer Nullumgebungsbasis* $\mathcal{U}(0)$ *von konvexen, kreisförmigen Mengen. Sei* $\{p_U : U \in \mathcal{U}(0)\}$ *die dazugehörige Familie von Minkowski-Funktionalen. Dann ist die von diesen Halbnormen gemäß des vorigen Satzes erzeugte Topologie wieder gleich* τ.

Häufig hat man die Situation vorliegen, daß ein Raum gegeben ist mit einer Ansammlung von Halbnormen, wie zum Beispiel $\mathcal{E}(\Omega)$. Anschließend will man wissen, was denn nun in diesem speziellen Fall die Begriffe „offene Menge", „stetige Abbildung" usw. konkret bedeuten. Das wird in folgendem Satz beantwortet, der die obigen Ergebnisse zusammenfaßt:

Satz A.31. *Sei* X *ein Vektorraum über dem Körper* $\mathbb{K}$, *und sei* $\{p_i : i \in I\}$ *eine Familie von Halbnormen, die Punkte trennt. Sei* τ *die davon erzeugte Topologie. Eine entsprechende Situation möge für einen* $\mathbb{K}$–*Vektorraum* Y *vorliegen. Dann gilt:*

- *eine Nullumgebungsbasis für* X *wird gegeben durch die Mengen*

  $$U_{J,\varepsilon} = \{x \in X : p_j(x) < \varepsilon,\ j \in J\},$$

  wobei ε *die positiven reellen Zahlen durchläuft, und* J *alle endlichen Teilmengen von* I *durchläuft,*
- *jede offene Menge von* X *kann geschrieben werden als Vereinigung (ggf. überabzählbar vieler) Mengen* $U_{J,\varepsilon}$,
- *eine lineare Abbildung* f *von* X *nach* Y *ist stetig genau dann, wenn zu jeder Nullumgebung* $V_{J,\varepsilon}$ *von* $0 \in Y$ *eine Nullumgebung* $U_{\tilde{J},\delta}$ *von* $0 \in X$ *existiert mit* $f(U_{\tilde{J},\delta}) \subset V_{J,\varepsilon}$,
- *eine Menge* $A \subset X$ *ist beschränkt genau dann, wenn es zu jedem* $i \in I$ *eine Konstante* C_i *gibt mit* $p_i(x) \leq C_i$ *für jedes* $x \in A$,

- *eine Folge* $(x_1, x_2, \dots) \subset X$ *konvergiert genau dann gegen einen Grenzwert* $x^* \in X$, *wenn* $\lim_{m\to\infty} p_i(x_m - x^*) = 0$ *für jede Halbnorm* p_i.

Eine besonders schöne Situation liegt vor, wenn es nur abzählbar viele Halbnormen p_i gibt. Dann können wir die Halbnormen numerieren gemäß $(p_1, p_2, \dots)$, und wir können eine Funktion $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ definieren als

$$d(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{p_j(x_1 - x_2)}{1 + p_j(x_1 - x_2)}, \qquad x_1, x_2 \in X.$$

Man zeigt schnell, daß d alle Eigenschaften einer Metrik erfüllt. Diese Metrik verschafft uns eine Topologie σ, für die eine Nullumgebungsbasis gegeben wird durch

$$\tilde{U}_\varepsilon := \{x \in X : d(x, 0) < \varepsilon\},$$

wobei ε die positiven reellen Zahlen durchläuft. Nach einiger Rechnung erkennt man, daß jedes Element der Nullumgebungsbasis zur lokalkonvexen Topologie τ unterboten werden kann durch ein Element der Nullumgebungsbasis zur Metrik-Topologie σ, und umgekehrt. Als Konsequenz haben wir dann $\sigma = \tau$.

Satz A.32. *Sei* X *ein lokalkonvexer TVR mit abzählbarer Nullumgebungsbasis. Dann existiert eine Metrik, die dieselbe Topologie erzeugt.*

Man sagt auch, daß der TVR X metrisierbar ist.

Noch schöner wird es, wenn dieser Raum X sogar vollständig ist (das heißt, daß jede Metrik-Cauchyfolge gegen einen Grenzwert in X konvergiert). Dann redet man von einem Fréchet-Raum.

Der angenehme Effekt ist, daß dann Stetigkeit wieder dasselbe bedeutet wie Folgenstetigkeit, (Überdeckungs)kompaktheit dasselbe wie Folgenkompaktheit, und Dichtheit dasselbe wie Folgen-Dichtheit.

Definition A.33 (Topologischer Dualraum). *Sei* X *ein TVR über einem Körper* $\mathbb{K}$. *Die Menge der linearen und stetigen Abbildungen von* X *nach* $\mathbb{K}$ *heißt* topologischer Dualraum, *wird mit der Schreibweise* X' *bezeichnet und ist offensichtlich ein Vektorraum über dem Körper* $\mathbb{K}$.

Jedes $x \in X$ *erzeugt auf* X' *eine Halbnorm* p_x *gemäß*

$$T \mapsto p_x(T) := |\langle T, x\rangle_{X'\times X}|, \qquad T \in X'.$$

Die von diesen Halbnormen auf X' *erzeugte Topologie nennen wir die* schwach–$*$–Topologie.

Definition A.34 (Transponierter Operator). *Seien* X *und* Y *lokalkonvexe Räume, und sei* $A\colon X \to Y$ *linear und stetig. Dann erzeugt* A *einen linearen Operator* $A^t\colon Y' \to X'$ *gemäß*

$$\left\langle A^t y', x\right\rangle_{X'\times X} := \langle y', Ax\rangle_{Y'\times Y}, \qquad y' \in Y', \quad x \in X,$$

den wir transponierten Operator *nennen.*

Satz A.35. *Seien obige Notationen vereinbart. Dann ist* A^t *stetig. Wenn* A *ein topologischer Isomorphismus ist (d.h. wenn auch* A^{-1} *stetig ist), dann auch* A^t, *und es ist* $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Beweis. Für jede Halbnorm p in X' brauchen wir endlich viele Halbnormen $q_1, \dots, q_k$ in Y' sowie eine Konstante C, sodaß

$$p(A^t y') \le C \sum_{j=1}^{k} q_j(y'), \qquad \forall y' \in Y'$$

gilt. Es sind nur diejenigen p interessant, die von einem $x \in X$ erzeugt werden im Sinne von

$$p(x') = |\langle x', x\rangle_{X'\times X}|, \qquad \forall x' \in X',$$

damit ist

$$p(A^t y') = |\left\langle A^t y', x\right\rangle| = |\langle y', Ax\rangle| = q(y'),$$

wobei q als Halbnorm auf Y' durch $Ax \in Y$ erzeugt wird.

Sei nun A bijektiv und A^{-1} stetig. Dann existiert $(A^{-1})^t \colon X' \to Y'$ gemäß

$$\left\langle (A^{-1})^t x', y \right\rangle_{Y' \times Y} := \left\langle x', A^{-1} y \right\rangle_{X' \times X}$$

und ist stetig.

Der Operator A^t ist injektiv, denn sei $A^t y' = 0 \in X'$, dann ist für alle $x \in X$

$$0 = \left\langle A^t y', x \right\rangle_{X' \times X} = \langle y', Ax \rangle_{Y' \times Y} ,$$

also $0 = \langle y', y \rangle_{Y' \times Y}$ für alle $y \in Y$, weil A surjektiv von X nach Y wirkt. Also $y' = 0$.

Der Operator A^t ist surjektiv, denn sei $x' \in X'$ gegeben, und ein $y' \in Y'$ mit $A^t y' = x'$ gesucht. Für alle $x \in X$ gilt dann

$$\langle x', x \rangle = \left\langle x', A^{-1} A x \right\rangle = \left\langle (A^{-1})^t x', Ax \right\rangle = \left\langle A^t (A^{-1})^t x', x \right\rangle ,$$

also muß $x' = A^t (A^{-1})^t x'$ sein. Damit ist $y' = (A^{-1})^t x'$, und es ist auch $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. □

Satz A.36. *Seien X und Y Banachräume und $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann gilt: falls* $\operatorname{img} \mathcal{A}$ *abgeschlossen in Y ist, dann ist* $\operatorname{img} \mathcal{A}^t$ *abgeschlossen in X'.*

Beweis. Siehe [17], Proposition A.5.7. □

Definition A.37 (Adjungierter Operator). *Seien X und Y Hilberträume und $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann definieren wir einen adjungierten Operator $A^* \in \mathcal{L}(Y,X)$ durch die Forderung $\langle x, A^* y \rangle_X := \langle Ax, y \rangle_Y$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$.*

Im Falle von $A = \triangle$ haben wir z.B. $X = H^2(\mathbb{R}^n)$ und $Y \in L^2(\mathbb{R}^n)$, woraus sich $\triangle^* \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), H^2(\mathbb{R}^n))$ ergibt. Das scheint im Hinblick auf die populäre Ansicht, daß $\triangle$ selbstadjungiert wäre, also $\triangle = \triangle^*$, überraschend, aber hierbei wurde stillschweigend ausgenutzt, daß zwei verschiedene Skalarprodukte vorliegen, und daß man einen Hilbertraum mit seinem Dual identifizieren kann.

Es gilt analog zum transponierten Operator: wenn $\operatorname{img} A$ abgeschlossen in Y ist, dann ist auch $\operatorname{img} A^*$ abgeschlossen in X.

Das folgende Ergebnis rechnet man schnell nach:

Satz A.38. *Seien X und Y Hilberträume sowie $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dann haben wir die folgenden orthogonalen Zerlegungen in abgeschlossene Unterräume:*

$$\overline{(\operatorname{img} A)} \oplus (\ker A^*) = Y,$$
$$\overline{(\operatorname{img} A^*)} \oplus (\ker A) = X.$$

Satz A.39. *Zu jedem Untervektorraum eines Vektorraumes gibt es mindestens einen algebraischen Komplementärraum.*

Definition A.40 (Quotientenraum). *Sei X ein normierter Raum, $M \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann heißt $X/M := \{[x] = x + M \colon x \in X\}$* Quotientenraum*, und er hat eine Norm $\|[x]\| := \inf_{y \in M} \|x + y\|_X$.*

Satz A.41. *Falls X Banachraum ist, dann auch X/M.*

Satz A.42. *Sei X ein normierter Raum, und sei $M \subset X$ ein linearer Unterraum.*

- *Falls* $\dim M < \infty$*, so ist M abgeschlossen, und es existiert ein komplementärer abgeschlossener Unterraum N, d.h. $X = M \oplus N$.*
- *Falls M abgeschlossen ist und* $\operatorname{codim} M := \dim(X/M) < \infty$*, so existiert ein komplementärer abgeschlossener Unterraum N zu M.*

Definition A.43 (Banach-Algebra). *Eine Banachalgebra X ist ein $\mathbb{C}$–Banachraum mit einer bilinearen assoziativen Abbildung $X \times X \to X$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$, wobei $\|x_1 x_2\|_X \leq \|x_1\|_X \cdot \|x_2\|_X$.*

Die Begriffe *kommutative Algebra*, *Einheit*, *invertierbares Element* definieren sich in kanonischer Weise. *Banachalgebrenhomomorphismen* sind definiert als lineare Abbildungen φ zwischen Banachalgebren, die multiplikativ sind, also $\varphi(x_1 x_2) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2)$. Ein linearer Unterraum I von X heißt *Ideal*, wenn $xy \in I$ und $yx \in I$ gilt, für alle $x \in X$ und $y \in I$.

Lemma A.44. *Sei X eine Banachalgebra und I ein abgeschlossenes Ideal. Dann ist X/I eine Banachalgebra (mit repräsentantenweise definierter Multiplikation). Wenn X kommutativ ist, dann auch X/I.*

Definition A.45 (Abgeschlossener Operator). *Seien X und Y Banachräume, und sei $\mathcal{A}$ ein linearer Operator (nicht unbedingt stetig) mit Definitionsbereich $D(\mathcal{A}) \subset X$, mit Werten in Y. Der Operator $\mathcal{A}$ heißt* abgeschlossen, *wenn der Graph von $\mathcal{A}$ abgeschlossen in $X \times Y$ ist, das heißt: wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(\mathcal{A})$ eine Folge ist mit Grenzwert $x^* \in X$, und wenn $\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}x_n = y^* \in Y$, dann ist $x^* \in D(\mathcal{A})$ und $\mathcal{A}x^* = y^*$.*

Man denke z.B. an $X = Y = L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{A} = \triangle$, mit Definitionsbereich $D(\mathcal{A}) = H^2(\mathbb{R}^n)$.

Falls $D(\mathcal{A})$ abgeschlossen ist, so ist $\mathcal{A}$ genau dann stetig, wenn $\mathcal{A}$ abgeschlossen ist (Satz vom abgeschlossenen Graphen).

Falls $\mathcal{A}$ abgeschlossen und injektiv ist, so ist auch $\mathcal{A}^{-1}$ abgeschlossen. Falls $\mathcal{A}$ abgeschlossen und injektiv ist, und zusätzlich noch $\operatorname{img}(\mathcal{A})$ abgeschlossen ist, so ist auch $\mathcal{A}^{-1}$ stetig (Satz von der Stetigkeit des inversen Operators).

Lemma A.46. *Seien X und Y Banachräume, und sei $\mathcal{A}\colon D(\mathcal{A}) \to Y$ ein abgeschlossener linearer Operator. Dann sind äquivalent:*

- *Es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\|\mathcal{A}x\|_Y \geq \varepsilon \|x\|_X$ für alle $x \in D(\mathcal{A})$.*
- *Der Operator $\mathcal{A}$ ist injektiv, und $\operatorname{img}(\mathcal{A})$ ist abgeschlossen.*

Satz A.47. *Seien X, Y, Z Banachräume, und seien $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(X, Y)$, $K \in \mathfrak{L}(X, Z)$, wobei K ein kompakter Operator sei. Angenommen, es wäre*

$$\|x\|_X \leq C_0 \left(\|\mathcal{A}x\|_Y + \|Kx\|_Z\right), \qquad \forall x \in X,$$

mit einem C_0 unabhängig von x. Dann ist $\operatorname{img} \mathcal{A}$ ein abgeschlossener Unterraum von Y.

Beweis. Siehe [17, Proposition A.6.7]. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] H. Amann and J. Escher. *Analysis III.* Birkhäuser, 2008.

[2] J. J. Duistermaat. *Fourier integral operators.* Birkhäuser, 1995.

[3] Y. Egorov and B.-W. Schulze. *Pseudo-differential operators, singularities, applications.* Operator Theory: Advances and Applications. 93. Birkhäuser, 1997.

[4] A. Erdelyi, Magnus, and Oberhettinger. *Higher Transcendental Functions. Bateman Manuscript Project.* McGraw–Hill, New York, 1953.

[5] B. V. Fedosov. *Index theorems.* Springer, 1991.

[6] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of algebraic geometry. 2nd ed.* Wiley Classics Library. New York, 1994.

[7] L. Hörmander. *Linear partial differential operators.* Springer, 1969.

[8] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators*, volume 1-4. Springer, 1983.

[9] H. Jarchow. *Locally convex spaces.* Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, 1981.

[10] J. Jost. *Partielle Differentialgleichungen.* Springer, 1998.

[11] J. Rauch. *Partial differential equations.* Springer, 1991.

[12] H. H. Schaefer. *Topological vector spaces.* Graduate Texts in Mathematics, 3. Springer, 1980.

[13] M. Shubin. *Pseudodifferential operators and spectral theory.* Springer, 2001.

[14] S. Simanca. *Pseudo-differential operators.* Pitman Research Notes in Mathematics, 236. Harlow: Longman Scientific & Technical; New York: John Wiley & Sons Ltd., 1990.

[15] J. Smoller. *Shock waves and reaction-diffusion equations. 2nd ed.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. 258. New York: Springer, 1994.

[16] C. D. Sogge. *Fourier integrals in classical analysis.* Cambridge Univ. Press, 1993.

[17] M. E. Taylor. *Partial differential equations. 1: Basic theory.* Applied Mathematical Sciences. 115. Springer, 1996.

[18] M. E. Taylor. *Partial differential equations. 2: Qualitative studies of linear equations.* Applied Mathematical Sciences. 116. Springer, 1996.

[19] F. Treves. *Basic linear partial differential equations.* Academic Press, 1975.

[20] H. Triebel. *Höhere Analysis.* Thun, Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch, 1980.

[21] V. Vladimirov. *Gleichungen der mathematischen Physik.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1972.

[22] W. Walter. *Einführung in die Theorie der Distributionen.* B.I. Wissenschaftsverlag, 1994.