

# 36. Süddeutsches Kolloquium über Differentialgeometrie

Universität Konstanz 2013

Programm

## Freitag, 21. Juni 2013:

9:00 – 9:05 **Begrüßung in F 426** (Gebäude F, Ebene 4, Raum 26)  
Dort werden alle Vorträge stattfinden.

9:05 – 10:05 **Volker Branding** (TU Wien):  
*Dirac-harmonic maps and extensions*

Kaffeepause

10:30 – 11:15 **Miroslav Vrztina** (TU Darmstadt):  
*Einfach periodische Flächen konstanter mittlerer Krümmung in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$*

11:30 – 12:30 **Simon Blatt** (KIT Karlsruhe):  
*The gradient flow of the Möbius energy*

Mittagspause

13:45 – 14:45 **Judit Abardia** (Universität Frankfurt):  
*Minkowski Bewertungen in einem komplexen Vektorraum*

15:00 – 16:00 **Patrick Emmerich** (Universität Freiburg):  
*Starrheit von Flächen ohne konjugierte Punkte*

Kaffeepause

16:30 – 17:30 **Susanne Kürsten** (TU Darmstadt):  
*Periodische Minimalflächen in  $\mathbb{R}^4$*

Abendessen

## Samstag, 22. Juni 2013:

9:15 – 10:15 **Ruben Jakob** (Universität Tübingen):  
*Sufficient conditions for Willmore-immersions in  $\mathbb{R}^3$  to be minimal surfaces*

10:30 – 11:30 **Julian Scheuer** (Universität Heidelberg):  
*Non-scale-invariant inverse curvature flows in hyperbolic space*

Kaffeepause

12:00 – 13:00 **Gerasim Kokarev** (LMU München):  
*Variational aspects of Laplace eigenvalues on Riemannian surfaces*

## Vorträge am Freitag

Volker Branding:

### **Dirac-harmonic maps and extensions**

(ohne Abstract)

Miroslav Vrzina:

### **Einfach periodische Flächen konstanter mittlerer Krümmung in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$**

*Abstract:* In  $\mathbb{R}^3$  gibt es eine bekannte Ein-Parameter-Familie von einfach periodischen Flächen konstanter mittlerer Krümmung (kurz CMC-Flächen): Die eingebetteten Rotationsflächen mit konstanter nicht-verschwindender mittlerer Krümmung (man nennt sie auch Unduloide) sind einfach periodisch bezüglich Translationen längs der Rotationsachse.

In homogenen – aber nicht-isotropen – Räumen wie  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  existieren Rotationsflächen nur um spezielle Achsen, und zwar um Fasern. Bezüglich beliebiger Achsen, d.h. Geodätischen, hat man immer noch Translationen.

Im Vortrag konstruieren wir in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  verallgemeinerte Zylinder um allgemeine Achsen als translations-invariante CMC-Flächen und stellen für das allgemeine Existenzproblem von einfach periodischen CMC-Flächen mit beliebiger Translationsachse einen Konstruktionsansatz mittels Daniel-Korrespondenz vor.

Simon Blatt:

### **The gradient flow of the Möbius energy**

*Abstract:* In this talk I will present some recent results regarding the gradient flow of the Möbius energy introduced by Jun O'Hara in 1991. Modeled to punish self-intersections of curves, one of the most striking features of this energy is that it is invariant under the group of Möbius transformations – a feature it has in common with the Willmore energy.

Due to this observation and based on numerical experiments, we expect that this flow develops singularities in finite or infinite time in general. We will show that the situation changes dramatically if one looks at planar curves: We will see that for planar curves we have smooth existence for all times and convergence to circles as time goes to infinity.

The basic tool in the proof is the construction of blowup profiles at possible singularities which also works for arbitrary codimension. These satisfy a type of pseudodifferential equation which in codimension one does not possess a non-trivial solution.

Judit Abardia:

### **Minkowski Bewertungen in einem komplexen Vektorraum**

*Abstract:* Der Projektionsoperator  $\Pi$  vom Raum der kompakten konvexen Mengen  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$  zu ihm selbst ist einer der wichtigsten Operatoren, die in konvexer Geometrie auftreten. Er erfüllt folgende Eigenschaften: Stetigkeit bzgl. der Hausdorff-Metrik; Translationsinvarianz;  $\text{SL}(\mathbb{R})$ -Kontravarianz, d.h. für alle  $g \in \text{SL}(\mathbb{R})$  gilt  $\Pi(gK) = g^{-*}\Pi(K)$  wobei  $g^{-*}$  die Inverse der transponierten Matrix ist; und Minkowski-Bewertungseigenschaft, d.h.  $\Pi(K \cup L) + \Pi(K \cap L) = \Pi(K) + \Pi(L)$ ,  $\forall K, L, K \cap L \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ , wobei  $+$  die Minkowski-Summe zwei konvexer Mengen sei.

Patrick Emmerich:

## **Starrheit von Flächen ohne konjugierte Punkte**

*Abstract:* Eine Vermutung von Morse und Hedlund bestätigend zeigte Eberhard Hopf 1943, dass Riemannsche 2-Tori ohne konjugierte Punkte flach sind. Dabei ist eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte, wenn in ihrer universellen Überlagerung je zwei Punkte durch eine eindeutige Geodätische verbunden werden. Mit einer neuen Methode zeigten Burago und Ivanov 1994, dass Riemannsche Tori beliebiger Dimension ohne konjugierte Punkte flach sind. In Zusammenarbeit mit Victor Bangert entstanden im Rahmen meiner Dissertation Starrheitsresultate für die Ebene und den 2-Zylinder, sowie für konform flache Zylinder beliebiger Dimension. In diesen Fällen kommt man nicht ohne zusätzliche Voraussetzungen aus, wie Beispiele mit nicht-positiver Krümmung (somit ohne konjugierte Punkte) zeigen. Eine Anwendung Hopfs ursprünglicher Methode liefert für die Ebene und den 2-Zylinder optimale Resultate unter Bedingungen an das Flächenwachstum. Das Resultat für die Ebene lautet folgendermaßen.

**Satz.** *Sei  $g$  eine vollständige Riemannsche Metrik ohne konjugierte Punkte auf der Ebene  $\mathbb{R}^2$ . Ist  $p \in \mathbb{R}^2$ , so gilt für die Fläche  $A_p(r)$  des metrischen Balls um  $p$  mit Radius  $r$*

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{A_p(r)}{\pi r^2} \geq 1$$

*mit Gleichheit genau dann, wenn  $g$  flach ist.* (Zusammenarbeit mit Victor Bangert)

Susanne Kürsten:

## **Periodische Minimalflächen in $\mathbb{R}^4$**

*Abstract:* Die Schwarz-D-Fläche ist eine dreifach periodische, eingebettete Minimalfläche im  $\mathbb{R}^3$ . Sie entsteht, indem man die Lösung eines bestimmten Plateau-Problems mit Hilfe des Schwarz-Spiegelungsprinzips fortsetzt.

Der Vortrag beschäftigt sich mit einer Verallgemeinerung dieses Vorgehens in den  $\mathbb{R}^4$ .

Zunächst wird erläutert, wie man auf analoge Weise eine verzweigungspunktfreie, periodische Minimalfläche in  $\mathbb{R}^4$  erhält.

Des Weiteren wird im Vortrag die Frage behandelt, wann diese Minimalfläche eingebettet ist. Hierbei stellt sich heraus, dass Selbstschnitte auch dann entstehen können, wenn die betrachtete Plateau-Lösung eingebettet ist.

## Vorträge am Samstag

Ruben Jakob:

### Sufficient conditions for Willmore-immersions in $\mathbb{R}^3$ to be minimal surfaces

*Abstract:* We provide two sharp sufficient conditions for immersed Willmore surfaces in  $\mathbb{R}^3$ , defined on  $C^4$ -subdomains of  $\mathbb{R}^2$ , to be already minimal surfaces, i.e. to have vanishing mean curvatures on their entire domains. Our precise results read as follows:

**Theorem 1.** *For some bounded  $C^4$ -domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  let  $X \in C^4(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$  denote some immersed Willmore surface with Gauss map  $N$  and mean curvature  $H$  satisfying  $H = 0$  on  $\partial\Omega$ . Furthermore, assume that there exist constants  $c, d \in \mathbb{R}$  and some fixed vector  $V \in \mathbb{S}^2$  such that  $\tilde{X} := cX + dV$  satisfies at least one of the following two conditions:*

a)  $H \geq 0$  (or  $H \leq 0$ ) holds in  $\Omega \cap O$ , where  $O \subset \mathbb{R}^2$  is some open neighbourhood of  $\partial\Omega$ , and

$$\inf_{\partial\Omega} \langle \tilde{X}, N \rangle \geq 0 \quad \text{as well as} \quad \sup_{\partial\Omega} \langle \tilde{X}, N \rangle > 0 ;$$

b)

$$\langle \tilde{X}, N \rangle > 0 \quad \text{in } \Omega \setminus \mathcal{A} \quad \text{as well as} \quad \sup_{\partial\Omega} \langle \tilde{X}, N \rangle > 0$$

for some finite set  $\mathcal{A} \subset \Omega$ .

Then  $H \equiv 0$  is satisfied in  $\bar{\Omega}$ , i.e.  $X$  is a minimal surface on  $\bar{\Omega}$ . These results turn out to be particularly suitable for applications to Willmore graphs. We can therefore show that Willmore graphs on bounded  $C^4$ -domains  $\bar{\Omega}$  with vanishing mean curvatures on the boundary  $\partial\Omega$  must already be minimal graphs. Our methods also prove that any closed Willmore surface in  $\mathbb{R}^3$  which can be represented as a smooth graph over  $\mathbb{S}^2$  has to be of constant mean curvature and therefore a round sphere. Finally we demonstrate that our results are sharp by means of an examination of some certain part of the Clifford-Torus in  $\mathbb{R}^3$ .

Julian Scheuer:

### Non-scale-invariant inverse curvature flows in hyperbolic space

*Abstract:* We consider inverse curvature flows in the hyperbolic space with starshaped initial hypersurface, driven by positive powers of a homogeneous curvature function. The solutions exist for all time and, after rescaling, converge to a well-defined hypersurface.

Gerasim Kokarev:

### Variational aspects of Laplace eigenvalues on Riemannian surfaces

(ohne Abstract)