Übungen zur Algebraischen Topologie, Blatt 1

Matthias Franz, Universität Konstanz, Sommersemester 2008

Besprechung am 5. Mai 2008

- (1) Sei $f: D^n \rightarrow D^n$ stetig und ohne Fixpunkt. Dann ist die Abbildung $g: D^n \rightarrow S^{n-1}$, die jedem $x \in D^n$ den Schnittpunkt $g(x)$ von S^{n-1} mit dem Strahl $\{\lambda x + (1 - \lambda)f(x) : \lambda > 0\}$ zuordnet, wohldefiniert und stetig. Zudem ist $g(x) = x$ für alle $x \in S^{n-1}$.
- (2) Seien $x_0, \dots, x_p \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig und $\text{aff}(x_0, \dots, x_p)$ ihre affine Hülle.

- (a) Für jedes $x \in \text{aff}(x_0, \dots, x_p)$ gibt es genau eine Darstellung der Form

$$x = \sum_{i=0}^p \lambda_i x_i \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^p \lambda_i = 1.$$

- (b) Für jedes $i \in \{0, \dots, p\}$ ist die Abbildung

$$\text{aff}(x_0, \dots, x_p) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x = \sum_{j=0}^p \lambda_j x_j \mapsto \lambda_i,$$

stetig.

- (3) Seien $x_0, \dots, x_p \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig, und sei

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=0}^p \lambda_i x_i : \sum_{i=0}^p \lambda_i = 1, \text{ alle } \lambda_i \geq 0 \right\}$$

das von ihnen aufgespannte p -Simplex.

- (a) σ ist kompakt und konvex.
(b) Die Extrempunkte von σ sind genau $x_0, \dots, x_p$.
(c) Die Menge

$$\overset{\circ}{\sigma} = \left\{ \sum_{i=0}^p \lambda_i x_i : \sum_{i=0}^p \lambda_i = 1, \text{ alle } \lambda_i > 0 \right\}.$$

ist das topologische Innere von σ in $\text{aff}(x_0, \dots, x_p)$. Insbesondere hat ein n -Simplex (topologisch) innere Punkte im $\mathbb{R}^n$.

- (4) Sei X kompakt, Y hausdorffsch und $f: X \rightarrow Y$ stetig und surjektiv. Dann ist f topologischer Quotient (nämlich durch die durch die Fasern von f gegebene Äquivalenzrelation).