Übungen zur Algebraischen Topologie, Blatt 2

Matthias Franz, Universität Konstanz, Sommersemester 2008

Besprechung am 19. Mai 2008

- (1) Sei K eine endliche Menge von Simplex im $\mathbb{R}^n$ mit
- (a) $\forall \sigma \in K, \tau \subset \mathbb{R}^n$ Simplex $\tau \leq \sigma \Rightarrow \tau \in K$,
 - (b) $\forall \sigma, \tau \in K \quad \sigma \neq \tau \Rightarrow \overset{\circ}{\sigma} \cap \overset{\circ}{\tau} = \emptyset$.
- Dann ist K Simplicialkomplex.
- (2) Sei K Simplicialkomplex. Zwei Simplexe $\sigma, \tau \in K$ heißen *benachbart*, falls $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$. Die Äquivalenzklassen $K_1, \dots, K_m$ der davon erzeugten Äquivalenzrelation sind Unterkomplexe von K , und $|K_1|, \dots, |K_m|$ sind die Zusammenhangs- und Wegzusammenhangskomponenten von $|K|$.
- (3) Die *reelle projektive Ebene* $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ erhält man, indem man in S^2 diametral gegenüberliegende Punkte identifiziert, also
- $$\mathbb{R}\mathbb{P}^2 = S^2 / \sim, \quad x \sim y :\Leftrightarrow x = \pm y, \quad x, y \in S^2.$$
- (a) $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ ist homöomorph zum Quotienten
- $$D^2 / \sim, \quad x \sim y :\Leftrightarrow x = y \text{ oder } x = -y \in S^1, \quad x, y \in D^2.$$
- (b) Überzeugen Sie sich, daß $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ homöomorph zu den geometrischen Realisierungen der unten schematisch dargestellten abstrakten Simplicialkomplexe ist.

- (4) Seien M eine halbgeordnete, endliche Menge und $\mathcal{K}$ die Menge der vollständig geordneten Teilmengen von M .
- (a) $\mathcal{K}$ ist ein abstrakter Simplicialkomplex auf M .
 - (b) Die Halbordnung auf $M = \{m_1, \dots, m_8\}$ sei durch folgende Relationen erzeugt:

$$\begin{aligned} m_1 \leq m_3 \leq m_7 \leq m_8, & & m_1 \leq m_5 \leq m_7, \\ m_2 \leq m_6 \leq m_8, & & m_2 \leq m_5. \end{aligned}$$

Beschreiben Sie die geometrische Realisierung von $\mathcal{K}$.