## Übungen zur Algebraischen Topologie, Blatt 3

Matthias Franz, Universität Konstanz, Sommersemester 2008 Besprechung am 2. Juni 2008

(1) Sei K ein Simplizialkomplex mit Komponenten  $K_1, \ldots, K_m$  wie in Aufgabe 2.2. Dann induzieren die Inklusionen  $K_i \hookrightarrow K$  für jedes p einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i=1}^m H_p(K_i) = H_p(K).$$

- (2) Berechnen Sie  $H_*(K)$  für einen der Simplizialkomplexe aus Aufgabe 2.3, deren zugrundeliegender Raum die reelle projektive Ebene  $\mathbb{RP}^2$  ist.
- (3) Überzeugen Sie sich, daß der dem unten abgebildeten Simplizialkomplex zugrundeliegende Raum das Möbiusband ist, und berechnen Sie seine Homologie.

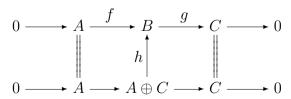
(Das Möbiusband entsteht aus dem Einheitsquadrat  $I^2$  durch die Identifizierungen  $(0, x) \sim (1, 1 - x), x \in I$ .)

(4) Seien  $f\colon A\to B,\ g\colon B\to C$  Gruppenhomomorphismen mit  $\ker f=0,\ \mathrm{im}\ f=\ker g$  und  $\mathrm{im}\ g=C.$  In diesem Falle spricht man von einer kurzen exakten Folge

$$0 \longrightarrow A \stackrel{f}{\longrightarrow} B \stackrel{g}{\longrightarrow} C \longrightarrow 0$$

von abelschen Gruppen. Zeigen Sie:

- (a) C = B/f(A) (kanonisch isomorph).
- (b) Es gibt einen Isomorphismus  $h \colon A \oplus C \to B$  und ein kommutatives Diagramm



(mit den kanonischen Abbildungen in der unteren Zeile) genau dann, wenn es einen Schnitt zu g, also einen Morphismus  $s\colon C\to B$  mit  $gs=1_C$ , gibt.

Man sagt: Die kurze exakte Folge spaltet.

- (c) Falls C frei ist, spaltet die Folge.
- (d) Geben Sie ein Beispiel einer kurzen exakten Folge, die nicht spaltet.