Übungen zur Algebraischen Topologie, Blatt 3

Matthias Franz, Universität Konstanz, Sommersemester 2008

Besprechung am 2. Juni 2008

(1) Sei K ein Simplizialkomplex mit Komponenten $K_1, \ldots, K_m$ wie in Aufgabe 2.2. Dann induzieren die Inklusionen $K_i \hookrightarrow K$ für jedes p einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i=1}^{m} H_p(K_i) = H_p(K).$$

(2) Berechnen Sie $H_*(K)$ für einen der Simplizialkomplexe aus Aufgabe 2.3, deren zugrundeliegender Raum die reelle projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$ ist.

(3) Überzeugen Sie sich, daß der dem unten abgebildeten Simplizialkomplex zugrundeliegende Raum das Möbiusband ist, und berechnen Sie seine Homologie.

(Das Möbiusband entsteht aus dem Einheitsquadrat I^2 durch die Identifizierungen $(0, x) \sim (1, 1-x)$, $x \in I$.)

(4) Seien $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ Gruppenhomomorphismen mit $\ker f = 0$, $\operatorname{im} f = \ker g$ und $\operatorname{im} g = C$. In diesem Falle spricht man von einer *kurzen exakten Folge*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

von abelschen Gruppen. Zeigen Sie:

(a) $C = B/f(A)$ (kanonisch isomorph).

(b) Es gibt einen Isomorphismus $h\colon A \oplus C \to B$ und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u, equal] & A \oplus C \arrow[r] \arrow[u, "h"] & C \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$

(mit den kanonischen Abbildungen in der unteren Zeile) genau dann, wenn es einen Schnitt zu g, also einen Morphismus $s\colon C \to B$ mit $gs = 1_C$, gibt.
Man sagt: *Die kurze exakte Folge spaltet.*

(c) Falls C frei ist, spaltet die Folge.

(d) Geben Sie ein Beispiel einer kurzen exakten Folge, die nicht spaltet.